Feuilles d'exercices n°6 : Convergence de suites

ECE3 Lycée Carnot

21 octobre 2010

Exercice 1 (**)

Vrai ou faux ?

1. Une suite croissante à partir d'un certain rang est minorée.
2. Une suite convergente est nécessairement monotone à partir d'un certain rang.
3. Une suite divergeant vers $+\infty$ est nécessairement croissante à partir d'un certain rang.
4. Si (u_n) est croissante, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant v_n$, alors (v_n) est croissante.
5. Si $(|u_n|)$ converge, alors (u_n) aussi.
6. Si $(|u_n|)$ converge vers 0, alors (u_n) aussi.

Exercice 2 (* à **)

Étudier la convergence et déterminer la limite éventuelle de chacune des suites suivantes :

- $u_n = 2^n - 3^n + 4^n$
- $u_n = (-n+2)e^{-n}$
- $u_n = 2^n - e^{2n} + 1$
- $u_n = \dfrac{n^2 - 3n + 2}{2n^2 + 5n - 34}$
- $u_n = \ln n + e^{-3n}$
- $u_n = \dfrac{2\sqrt{n} + 3\ln n - 5}{\ln(n^3) - 3n + 2}$
- $u_n = \sqrt{n^2 - 1} - n$
- $u_n = \dfrac{(n+2)!}{(n^2+1) \times n!}$
- $u_n = e^{-\frac{1}{2n}} + \ln\left(\dfrac{n}{n+2}\right)$

Exercice 3 (**)

On considère une suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$.

1. Montrer que tous les termes de la suite sont strictement positifs.
2. Déterminer la monotonie de la suite (u_n).
3. Montrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 \geqslant 2n + u_0^2$. En déduire la limite de la suite.

Exercice 4 (***)

On considère une suite (u_n) définie par $u_n = \left(1 + \dfrac{a}{n}\right)^n$, avec $a \in \mathbb{R}_+$.

1. Montrer que la suite est croissante (pour cette question, on étudiera les variations de la fonction $f : x \mapsto x \ln\left(1 + \dfrac{a}{x}\right)$ en la dérivant deux fois).
2. Montrer que, $\forall x \geqslant 0$, $\dfrac{t}{1+t} \leqslant \ln(1+t) \leqslant t$.
3. En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{na}{n+a} \leqslant \ln u_n \leqslant a$.
4. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
5. Quel résultat obtient-on en prenant $a = 1$?

Exercice 5 (**)

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies de la façon suivante : $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$, et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$. Montrer que ces deux suites sont adjacentes (les curieux seront contents d'apprendre que leur limite commune vaut $\frac{\pi^2}{6}$).

Exercice 6 (**)

On considère la suite (u_n) définie pour $n \geqslant 1$ par $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{n}{n^2+k}$.

1. Montrer que $\frac{n^2}{n^2+n} \leqslant u_n \leqslant \frac{n^2}{n^2+1}$.
2. Déduire de l'encadrement précédent que la suite est convergente, et préciser sa limite.

Exercice 7 (***)

Soient a et b deux réels vérifiant $0 < a < b$. On définit deux suites de la façon suivante : $u_0 = a$; $v_0 = b$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$.

1. Vérifier que ces deux suites sont bien définies.
2. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$ (pour une fois, pas besoin de récurrence).
3. Déterminer la monotonie de chacune des deux suites.
4. En déduire que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.

Exercice 8 (***)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a \neq 1$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{u_n - 1}$.

1. Montrer que la suite est bien définie.
2. Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$.
3. Étudier également le signe de $f(x) - x$.
4. On suppose $a > 1$. À l'aide des questions précédentes, montrer que $\forall n \geqslant 1$, $u_n \geqslant 2(1+\sqrt{2})$, puis que la suite est croissante. En déduire sa limite éventuelle.
5. Étudier de même la convergence de la suite quand $a < 1$.

Exercice 9 (*)

Donner un équivalent, le plus simple possible, de chacune des suites suivantes :

1. $u_n = \frac{5n - n^2 + 2n^7}{n^8 - 3n + 12}$
2. $u_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n}$
3. $u_n = \frac{n^2}{\sqrt{n^2+n+1}}$
4. $u_n = e^{-n} + e^{-2n}$

5. $u_n = \dfrac{2\sqrt{n} + e^{3n} - 5\ln n}{n^2 - 3\ln(2n^4)}$
6. $u_n = \dfrac{1}{n^2} + e^{-3n}$
7. $u_n = \ln\left(1 - \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{1}{n}\right)$
8. $u_n = \ln(1 + n^3)$
9. $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n$

Exercice 10 (**)

On considère la suite (S_n) définie pour $n \geqslant 1$ par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
2. À l'aide de la question précédente, déterminer la limite de la suite (S_n).
3. On pose désormais $u_n = S_n - 2\sqrt{n}$. Démontrer à l'aide du théorème de convergence monotone que (u_n) converge.
4. En déduire un équivalent simple de S_n.

Exercice 11 (d'après EML) (**)

On considère la fonction $f : x \mapsto x^2 + 4x + 2$ et une suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ (u_0 étant un réel quelconque).

1. Étudier les variations de la fonction f, et déterminer le nombre d'antécédents par f d'un réel m en fonction des valeurs de m. Résoudre en particulier $f(x) = -1$.
2. Montrer qu'il existe trois valeurs de u_0 pour lesquelles la suite (u_n) est stationnaire (c'est-à-dire qu'elle est constante à partir d'un certain rang).
3. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} + 2 = (u_n + 2)^2$. En déduire la nature de la suite (u_n) selon la valeur de u_0.

Exercice 12 (d'après EDHEC) (***)

On considère, pour tout entier naturel n, la fonction f_n définie par $f_n(x) = x^5 + nx - 1$.

1. Étudier les variations de f_n.
2. Montrer que, $\forall n \geqslant 1$, il existe un unique réel u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.
3. Montrer que $u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$ et en déduire la convergence de la suite (u_n).
4. Montrer que $u_n \sim \dfrac{1}{n}$.
5. Déterminer un équivalent simple de $\dfrac{1}{n} - u_n$.

Exercice 13 (***)

Soit (u_n) une suite bornée. On introduit alors deux suites auxiliaires définies par $a_n = \max(u_0, u_1, \dots, u_n)$ et $b_n = \min(u_0, u_1, \dots, u_n)$.

1. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes.
2. Que peut-on dire de la suite (u_n) si elles ont la même limite ?
3. On pose désormais $c_n = \max(u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \dots, u_{2n})$. Cette suite est-elle nécessairement convergente ?

Exercice 14 (****)

Soit (u_n) une suite convergeant vers une limite finie l. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} u_k$ (autrement dit, v_n est la moyenne des n premiers termes de la suite (u_n)) converge également vers l (commencez par le cas plus facile où $l = 0$, et revenez à la définition de la limite).

Et pour finir en beauté, deux (extraits de) sujets de concours, à peine retouchés (une ou deux questions que vous ne pouvez pas faire ont été supprimées).

Problème 1 (premier exercice Ecricome 99) (***)

Préliminaire

Soit (x_n) une suite numérique qui vérifie, pour tout entier naturel n, la relation :

$$x_{n+2} = \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n$$

1. Résoudre l'équation caractéristique de cette suite et, sans chercher à déterminer les coefficients α et β, donner l'allure du terme général de la suite.
2. En déduire la limite de la suite (x_n).

On étudie désormais la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = a \geqslant 1$; $u_1 = b \geqslant 1$, et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}$$

Question 1

1.a : Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et vérifie : $u_n \geqslant 1$.

1.b : Ecrire un programme en Turbo Pascal qui calcule et affiche la valeur de u_n pour des valeurs de a et b réelles supérieures ou égales à 1 et de n entier supérieur ou égal à 2, entrées par l'utilisateur.

Question 2

On se propose d'établir la convergence de la suite (u_n) par l'étude d'une suite auxiliaire (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \dfrac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1$

2.a : Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$

2.b : Vérifier, pour tout entier n, que $v_{n+2} = \dfrac{v_{n+1} + v_n}{2(2 + v_{n+2})}$.

En déduire que : $|v_{n+2}| \leqslant \dfrac{1}{3}(|v_n| + |v_{n+1}|)$.

2.c : On note (x_n) la suite définie par : $x_0 = |v_0|$, $x_1 = |v_1|$ et pour tout entier naturel n :

$$x_{n+2} = \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n$$

Montrer que, pour tout entier naturel n, $|v_n| \leqslant x_n$ et conclure quant à la convergence de la suite (u_n).

Problème 2 (début de Maths III HEC/ESCP 2002) (****)

Pour toutes suites numériques $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on définit la suite $u \times v = w$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k}$$

Partie A : Exemples

1. **Premiers exemples**
   Pour tout entier naturel n, calculer w_n en fonction de n dans chacun des cas suivants :
   (a) pour tout entier naturel n, $u_n = 2$ et $v_n = 3$.
   (b) pour tout entier naturel n, $u_n = 2^n$ et $v_n = 3^n$.

2. **Programmation**
   Dans cette question, les suites u et v sont définies par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \ln(n+1)$ et $v_n = \dfrac{1}{n+1}$.
   Écrire un programme en Turbo-Pascal qui demande à l'utilisateur une valeur de l'entier naturel n, qui calcule et affiche les valeurs $w_0,\ w_1,\ \ldots,\ w_n$.

3. **Un résultat de convergence**
   Dans cette question, la suite u est définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et v est une suite de réels positifs, décroissante à partir du rang 1 et de limite nulle.

   (a) Établir, pour tout couple d'entiers naturels (n, m) vérifiant $n < m$, l'inégalité :

   $$\sum_{k=n+1}^{m} u_k \leqslant u_n$$

   (b) Soit n un entier strictement supérieur à 1. Prouver les inégalités :

   $$w_{2n} \leqslant v_0\, u_{2n} + 2v_n + v_1\, u_n \quad \text{et} \quad w_{2n+1} \leqslant v_0\, u_{2n+1} + 2v_{n+1} + v_1\, u_n$$

   (c) En déduire que les deux suites $(w_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0 ainsi que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (d) Soit u' la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u'_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$. À l'aide de la question précédente, montrer que la suite $u' \times v$ est convergente et de limite nulle.

Partie B : Application à l'étude d'un ensemble de suites

Dans cette partie, A désigne l'ensemble des suites $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad a_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$$

1. Montrer que toute suite décroissante de réels positifs est élément de A et qu'une suite strictement croissante ne peut appartenir à A.
2. Soit $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}^{\times},\ z_{n+1} = \dfrac{1}{2}(z_n + z_{n-1})$.
   (a) Montrer qu'il existe deux constantes réelles α et β telles que l'on a :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = \alpha + \beta\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$
   (b) En déduire qu'il existe des suites appartenant à A et non monotones.
3. Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de A et b la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.
   On définit alors la suite c par : $c_0 = a_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^{\times},\ c_n = a_n + \dfrac{1}{2}a_{n-1}$.
   (a) Montrer que la suite c est décroissante à partir du rang 1 et qu'elle converge vers un nombre ℓ que l'on ne cherchera pas à calculer.
   (b) Pour tout entier naturel n, établir l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k} = a_n$.
   Que peut-on en déduire pour les suites $b \times c$ et a ?
   (c) Soit ε la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ \varepsilon_n = c_n - \ell$ et d la suite $b \times \varepsilon$.
   En utilisant le résultat de la question **3**. de la Partie **1**, montrer que la suite d converge vers 0.
   (d) Pour tout entier naturel n, établir l'égalité : $d_n = a_n - \dfrac{2}{3}\ell\left(1 - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.
   En déduire que la suite a converge et préciser sa limite.