Feuille d'exercices n°10 : séries

ECE3 Lycée Carnot

3 décembre 2010

Exercice 1 (**)

Étudier la nature et calculer la somme éventuelle des séries suivantes (distinguer selon la valeur de x pour les séries faisant intervenir un x) :

- $\sum n^2 x^n$
- $\sum \frac{n-1}{3^n}$
- $\sum \frac{n(n-1)x^n}{n!}$
- $\sum \frac{n^2 8^n}{n!}$
- $\sum \frac{4n^2+5n}{5^n}$
- $\sum \frac{2n^2}{n^3-1}$
- $\sum \frac{(-1)^n n^2}{3^n}$
- $\sum \frac{4(-1)^n}{n!}$
- $\sum \frac{n}{3^{2n+1}}$
- $\sum \frac{n+7}{2^n n!}$
- $\sum \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$
- $\sum \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$

Exercice 2 (**)

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$, puis calculer sa somme après avoir mis u_n sous la forme $\dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{n+2}$.

Exercice 3 (**)

Calculer par une méthode similaire à celle de l'exercice précédent la somme de la série de terme général $\dfrac{1}{4n^2-1}$.

Exercice 4 (**)

Soit u_n une suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \geqslant 1$, $u_{n+1} = e^{-u_n} u_n$.

1. Montrer que la suite u_n est convergente et préciser sa limite.
2. En posant $v_n = \ln u_n$, calculer la somme partielle de la série de terme général u_n en fonction de v_0 et de v_{n+1}.
3. En déduire la nature de $\sum u_n$.

Exercice 5 (*)

On note S_n la somme partielle d'indice n de la série harmonique. Montrer que $S_{2n} - S_n \geqslant \dfrac{1}{2}$. En déduire une nouvelle preuve de la divergence de la série harmonique.

Exercice 6 (***)

On considère une suite (u_n) définie par $u_0 \in [0;1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
2. Déterminer la nature de la série de terme général u_n^2 et sa somme éventuelle.
3. Prouver que la série de terme général $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est divergente.
4. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 7 (*)

Étudier la nature de chacune des séries suivantes, sans chercher à calculer leur somme :

- $\sum \dfrac{1}{k^2 - k}$
- $\sum \dfrac{1}{e^k + e^{-k}}$
- $\sum \dfrac{1}{k^3 + 2^k}$
- $\sum \ln \dfrac{n^2 + n^4}{2n^4}$
- $\sum \sqrt{\dfrac{n+2}{n^3 - 5n + 1}}$
- $\sum \dfrac{\ln n}{3^n}$

Exercice 8 (**)

En admettant que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.