# Feuilles d'exercices n°3 : Sommes, produits, récurrences

ECE3 Lycée Carnot

21 septembre 2010

## Exercice 1 (*)

Exprimer à l'aide du symbole $\Sigma$ les expressions suivantes :

1. $S_1 = 3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots + 3^{15}$
2. $S_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{4} + \dfrac{3}{8} + \dfrac{4}{16} + \cdots + \dfrac{10}{1\ 024}$
3. $S_3 = a + \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{a^3}{3} + \cdots + \dfrac{a^n}{n}$
4. $S_4 = 2 - 4 + 6 - 8 + \cdots + 50$

## Exercice 2 (** à ***)

Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}(2k+1)$
2. $\displaystyle\sum_{k=945}^{k=2009} 3$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}(6k^2+4k+1)$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^k$
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k(2k^2-1)$
6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=18} \frac{1}{3^k}$
7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} 3^{2k}$
8. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} 2^k + k^2 + 2$
9. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{2^k}{3^{k+1}}$

## Exercice 3 (**)

Déterminer trois réels $a$, $b$ et $c$ tels que $\forall k \geqslant 2$, $\dfrac{k-5}{k(k^2-1)} = \dfrac{a}{k-1} + \dfrac{b}{k} + \dfrac{c}{k+1}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=2}^{k=n} \frac{k-5}{k(k^2-1)}$.

## Exercice 4 (**)

Il s'agit d'une méthode alternative à celle du cours pour calculer la sommes des carrés d'entiers.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}(k+1)^3 - \sum_{k=1}^{k=n} k^3$.
2. En développant $(k+1)^3$, exprimer $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}(k+1)^3$ à l'aide de sommes classiques.
3. En comparant les deux calculs précédents, retrouver la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k^2$.

## Exercice 5 (***)

Calculer les sommes doubles suivantes :
$\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij$ ; $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij$ ; $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j}$ ; $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |i-j|$ et $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i2^j$

## Exercice 6 (**)

Calculer les produits suivants :
1. $\displaystyle\prod_{k=2}^{k=n}\left(1-\frac{1}{k}\right)$ 2. $\displaystyle\prod_{k=2}^{k=n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$ 3. $\displaystyle\prod_{k=1}^{k=n}(6k-3)$

## Exercice 7 (***)

Montrer par récurrence les propriétés suivantes :

1. $\forall n \geqslant 4,\ 2^n \leqslant n!$
2. $\forall n \geqslant 1,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k \times k! = (n+1)! - 1$
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=1}^{k=2^n} \frac{1}{k} \geqslant 1 + \frac{n}{2}$

## Exercice 8 (**)

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$. Calculer les premiers termes de la suite, émettre une conjecture sur la valeur de $u_n$, puis la prouver par récurrence.

## Exercice 9 (**)

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_n + 4n + 6)$. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n + \dfrac{1}{3^n}$.

## Exercice 10 (***)

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = u_1 = 0$, $u_2 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$. Calculer les premiers termes de la suite, émettre une conjecture sur la valeur de $u_n$, puis la prouver par récurrence.

## Exercice 11 (***)

Le but de cet exercice est de calculer la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n}(2k+1)^3$ de trois façons différentes.

1. Écrire $S_n$ sans utiliser de symbole somme. De combien de termes cette somme est-elle composée ?
2. Calculer $S_n$ en développant $(2k+1)^3$.
3. On pose $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n}(2k)^3$ et $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=2n+1} k^3$. Expliquer pourquoi $U_n = S_n + T_n$ (à l'aide d'une phrase si vous n'arrivez pas à le faire par le calcul).
4. Calculer $T_n$ et $U_n$.
5. Retrouver la valeur de $S_n$ à l'aide des deux questions précédentes.
6. Prouver par récurrence que $S_n = (n+1)^2(2n^2 + 4n + 1)$.