

Feuille d'exercices n°12 : Probabilités

ECE3 Lycée Carnot

11 janvier 2011

Exercice 1 (*)

On lance une pièce équilibrée quatre fois de suite. Décrire de façon ensembliste les événements A : « On obtient deux fois Pile et deux fois Face » et B : « Les deux premiers lancers ont donné des résultats différents ». Calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$.

Exercice 2 (**)

On lance un dé quatre fois de suite. Calculer les probabilités suivantes :

1. On obtient quatre fois le même chiffre.
2. On obtient quatre chiffres différents.
3. On obtient quatre chiffres qui se suivent (en ordre croissant ou décroissant).

Exercice 3 (**)

Un coffre contient 6 diamants, 8 émeraudes et 10 rubis. On tire quatre pierres précieuses au hasard dans le coffre. Calculer les probabilités suivantes (valeurs exactes, puis une valeur approchée à 10^{-2} près à l'aide de la calculatrice) :

1. Les quatre pierres sont du même type.
2. On tire deux diamants et deux rubis.
3. On tire autant de diamants que de rubis.

Exercice 4 (*)

Dans une urne se trouvent 4 boules noires et deux boules blanches. Cinq personnes tirent successivement (sans remise) une boule dans l'urne. Le premier qui tire une boule blanche a gagné, quelle est la probabilité de gain pour chaque personne ?

Exercice 5 (**)

Dans un petit pays, les numéros de téléphone sont constitués de seulement 6 chiffres. On compose un tel numéro au hasard. Calculer les probabilités suivantes :

1. Le numéro composé commence par 01.
2. Le numéro composé est constitué de 6 chiffres distincts.
3. Le numéro composé contient deux fois le chiffre 5.
4. Le numéro composé ne contient que des chiffres pairs.
5. Le numéro composé a ses six chiffres en ordre strictement croissant.

Exercice 6 (***)

Dans une urne sont placées 15 boules vertes et 10 boules blanches. On tire successivement (sans remise) 5 boules dans l'urne. Calculer les probabilités suivantes :

1. On obtient 5 boules vertes.
2. On obtient une première boule verte, les deux suivantes blanches, les deux dernières vertes.
3. On obtient au plus une boule blanche.
4. On obtient trois boules vertes et deux blanches.

Reprendre l'exercice avec des tirages avec remise.

Exercice 7 (**)

Dans une classe de 38 élèves, 31 étudient l'anglais, 24 l'espagnol, 17 l'allemand ; 12 étudient à la fois anglais et allemand, 9 étudient espagnol et allemand, et 4 étudient les trois langues simultanément. On tire un élève au hasard. Calculer les probabilités suivantes :

1. Il étudie l'anglais et l'espagnol.
2. Il étudie l'anglais ou l'espagnol.
3. Il étudie uniquement l'allemand.

Exercice 8 (***)

Deux personnes A et B jouent au jeu suivant : A lance un pièce, s'il obtient Pile, il a gagné. Sinon, B lance une pièce, s'il obtient Face il a gagné. Sinon, c'est à nouveau à A de jouer . . . On note A_k (respectivement B_k) l'événement : « Le joueur A (respectivement B) gagne à son k -ème lancer ». Calculer la probabilité de A_k et de B_k . On suppose désormais que le jeu s'arrête après 10 lancers (cinq pour chaque joueur). Calculer la probabilité des événements suivants :

1. Le joueur A gagne en lançant moins de trois fois la pièce.
2. Le joueur B gagne.
3. Personne ne gagne.
4. On suppose que quelqu'un a gagné. Quelle est la probabilité que ce soit A ?

Exercice 9 (***)

On range aléatoirement cinq boules distinguables dans quatre boîtes également distinguables.

1. Quel est le nombre de rangements différents possibles ?
2. Quelle est la probabilité que toutes les boules soient rangées dans la même boîte ?
3. Quelle est la probabilité que deux boîtes exactement soient vides ?
4. Même question avec une boîte vide.
5. En déduire la probabilité qu'aucune boîte ne soit vide.
6. Retrouver ce résultat directement à l'aide de la formule de Poincaré.

Exercice 10 (***)

Un tournoi de tennis accueille 64 joueurs, dont 8 sont têtes de séries. Un bug au moment d'effectuer le tirage au sort fait remplir le tableau de façon totalement aléatoire, y compris les têtes de séries.

1. Quelle est la probabilité qu'au moins deux têtes de série se rencontrent dès le premier tour ?
2. Quelle est la probabilité que les têtes de séries ne puissent pas se rencontrer avant les quarts de finale ?

Exercice 11 (*)

Un classique : une maladie touche un individu sur 100. On dispose d'un test de dépistage qui est positif pour 95% des personnes malades et pour 0.1% des individus sains. Un individu est testé positif. Quelle est la probabilité qu'il soit effectivement malade ? Reprendre le même exercice en supposant maintenant que la maladie ne touche qu'une personne sur 1 000, et que le test sera positif pour 0.5% des individus sains. Que penser du résultat obtenu ?

Exercice 12 (**)

On tire cinq cartes dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir les quatre As ? Un joueur dévoile deux cartes de son jeu, qui sont des As. Quelle est maintenant la probabilité qu'il détienne quatre As ? Comparer avec la probabilité d'avoir deux As quand on tire 3 cartes simultanément dans un jeu de 32 cartes. Interpréter.

Exercice 13 (*)

Une guerre sévit depuis des années entre deux pays voisins. Les habitants du pays A sont à 60% favorables à la paix et à 16% favorables à la guerre (le reste étant sans opinion) ; par contre dans le pays B , 68% des habitants sont pour la guerre et 12% sont pour la paix. On rencontre un individu sans savoir quel pays il habite (une chance sur deux pour chaque).

1. Calculer la probabilité qu'il soit sans opinion.
2. Il est favorable à la guerre, quelle est la probabilité qu'il habite le pays A ?
3. Même question s'il est favorable à la paix.

Exercice 14 (***)

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n . Dans l'urne numéro k se trouvent k boules blanches et $n - k$ rouges. On choisit au hasard une urne puis on tire deux boules dans cette urne. Quelle est la probabilité d'avoir deux boules rouges ? Même question si on tire successivement les deux boules avec remise. Quelles sont les limites de ces probabilités quand n tend vers l'infini ?

Exercice 15 (**)

Dans un lot de 10 dés à 6 faces, 2 sont truqués de la façon suivante : la face 6 est tirée la moitié du temps, et les autres faces apparaissent avec la même probabilité. On choisit un dé au hasard et on le lance.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un 6 ?
2. On obtient un 6. Quelle est la probabilité que le dé soit truqué ?
3. On obtient un 2. Quelle est la probabilité que le dé ne soit pas truqué ?

Exercice 16 (**)

On dispose de deux urnes, la première contenant 6 boules rouges et trois noires, et la deuxième 6 noires et trois rouges. On choisit une urne au hasard, puis on y tire deux boules, on obtient deux rouges. Quelle est la probabilité qu'on ait choisi la première urne? Même question si on effectue les deux tirages successivement avec remise.

Exercice 17 (**)

Une compagnie aérienne étudie l'évolution des réservations sur l'un de ses vols. Elle constate que l'état d'une place donnée évolue ainsi : elle est libre au jour 0 (jour d'ouverture des réservations), puis, si elle est libre au jour n , il y a une probabilité $\frac{4}{10}$ que quelqu'un la réserve au jour $n + 1$. Par contre, si elle est réservée au jour n , elle reste réservée au jour $n + 1$ avec probabilité $\frac{9}{10}$. On note p_n la probabilité que la place soit réservée au jour n . Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n et en déduire p_n , puis sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 18 (***)

Une guêpe entre par inadvertance dans un appartement composé de deux pièces A et B . Elle est dans la pièce A à $t = 0$, et évolue ainsi : si elle est en A à l'instant n , elle reste en A avec probabilité $\frac{1}{3}$ ou passe en B avec probabilité $\frac{2}{3}$ à l'instant $n + 1$; si elle est en B , elle retourne en A avec probabilité $\frac{1}{4}$, reste en B avec probabilité $\frac{1}{2}$ et sort de l'appartement avec probabilité $\frac{1}{4}$. Si elle est dehors, elle y reste. On note A_n : « La guêpe est en A à l'instant n ». Je vous laisse deviner ce que représentent B_n et C_n . Les probabilités respectives de ces événements sont notées a_n , b_n et c_n .

1. Calculer a_0 , b_0 , c_0 , a_1 , b_1 , c_1 , a_2 , b_2 et c_2 .
2. Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et de b_n .
3. Montrer que $u_n = \frac{6}{10}a_n - \frac{3}{10}b_n$ est une suite constante.
4. Montrer que $u_n = \frac{4}{10}a_n + \frac{3}{10}b_n$ est une suite géométrique.
5. En déduire les valeurs de a_n et de b_n .
6. Que vaut c_n ?

Exercice 19 (***)

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n . On pioche une poignée de jetons qui contient un nombre aléatoire de jetons, et on sait qu'il y a équiprobabilité sur le nombre de jetons tirés (qui peut être égal à 0 ; autrement dit, on eut pioché une poignée vide). Quelle est la probabilité de piocher le jeton numéro 1 dans notre poignée? Les événements A : « On a pioché le jeton 1 » et B : « On a pioché le jeton 2 » sont-ils indépendants? Mêmes questions dans le cas où ce n'est plus le nombre de jeton qui est réparti uniformément, mais où on a équiprobabilité sur toutes les poignées possibles (toujours en comptant la poignée vide) ?