

# Feuille d'exercices n°22 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

26 avril 2011

## Exercice 1 (\* à \*\*)

$$I_1 = \int_1^2 \frac{t-1}{t^2} dt = \left[ \ln t - \frac{1}{t} \right]_1^2 = \ln 2 - \frac{1}{2} - \ln 1 + 1 = \ln 2 + \frac{1}{2}$$

$$I_2 = \int_e^3 \frac{dx}{x \ln x} = [\ln(\ln x)]_e^3 = \ln(\ln 3)$$

$$I_3 = \int_1^2 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx = [e^{\sqrt{x}}]_1^2 = e^{\sqrt{2}} - e$$

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_0^2 |x^2 - 3x + 2| dx = \int_0^1 (x^2 - 3x + 2) dx + \int_1^2 (-x^2 + 3x - 2) dx \\ &= \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_0^1 + \left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x \right]_1^2 = \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 - \frac{8}{3} + 6 - 4 + \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 = 1 \end{aligned}$$

$$I_5 = \int_0^4 \sqrt{x}(x - 2\sqrt{x}) dx = \int_0^4 x^{\frac{3}{2}} - 2x dx = \left[ \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - x^2 \right]_0^4 = \frac{2}{5}4^{\frac{5}{2}} - 16 = \frac{64}{5} - 16 = -\frac{16}{5}$$

$$I_6 = \int_0^2 z^4 e^{-z^5} dz = \left[ -\frac{1}{5}e^{-z^5} \right]_0^2 = -\frac{1}{5}(e^{-32} - e) = \frac{1}{5}(e - \frac{1}{e^{32}})$$

$$I_7 = \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{5}{2}} E(x) dx = \int_{-\frac{1}{3}}^0 -1 dx + \int_0^1 0 dx + \int_1^2 1 dx + \int_2^{\frac{5}{2}} 2 dx = -\frac{1}{3} + 0 + 1 + 1 = \frac{5}{3}$$

$$I_8 = \int_1^e \frac{(\ln s)^5}{s} ds = \left[ \frac{1}{6}(\ln s)^6 \right]_1^e = \frac{1}{6}$$

$$I_9 = \int_0^{\frac{\ln 2}{2}} \frac{e^{2t}}{e^{2t} + 2} dt = \left[ \frac{1}{2} \ln(e^{2t} + 2) \right]_0^{\frac{\ln 2}{2}} = \frac{1}{2}(\ln 4 - \ln 3) = \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3}$$

$$I_{10} = \int_0^2 x^2(x^3 + 1)^{\frac{3}{2}} dx = \left[ \frac{2}{9}(x^3 + 1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 = \frac{2}{9}(9^{\frac{3}{2}} - 1) = \frac{52}{9}$$

$$I_{11} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\exp(\frac{-3}{v^2})}{v^3} dv = \left[ \frac{1}{6} \exp\left(-\frac{3}{v^2}\right) \right]_1^{\sqrt{3}} = \frac{1}{6}(e^{-1} - e^{-3}) = \frac{1}{6} \left( \frac{1}{e} - \frac{1}{e^3} \right)$$

$$I_{12} = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1-q}{(q^2-2q)^4} dq = \left[ \frac{1}{6}(q^2-2q)^{-3} \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{6} \left( \left(\frac{9}{4}-3\right)^{-3} - \left(\frac{1}{4}-1\right)^{-3} \right) = \frac{1}{6} \left( \left(-\frac{3}{4}\right)^{-3} - \left(-\frac{3}{4}\right)^{-3} \right) = 0$$

$$I_{13} = \int_1^4 \frac{e^{-\sqrt{z}}}{\sqrt{z}} dz = [-2e^{-\sqrt{z}}]_1^4 = -2(e^{-2} - e^{-1}) = 2 \left( \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2} \right)$$

## Exercice 2 (\*\*)

$$I_1 = \int_{-1}^1 x e^{3x} dx = \left[ \frac{1}{3} x e^{3x} \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{1}{3} e^{3x} dx = \frac{1}{3} (e^3 + e^{-3}) - \left[ \frac{1}{9} e^{3x} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{9} e^3 + \frac{4}{9} e^{-3}$$

où on a posé  $u'(x) = e^{3x}$ ;  $v(x) = x$ ;  $u(x) = \frac{1}{3} e^{3x}$  et  $v'(x) = 1$ .

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_1^4 \sqrt{3s} \ln s ds = \sqrt{3} \left[ \frac{2}{3} s^{\frac{3}{2}} \ln s \right]_1^4 - \sqrt{3} \int_1^4 \frac{2}{3} \sqrt{s} ds = \frac{2}{3} \sqrt{3} 4^{\frac{3}{2}} \ln 4 - \sqrt{3} \left[ \frac{4}{9} s^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 \\ &= \frac{32\sqrt{3}}{3} \ln 2 - \frac{32}{9} \sqrt{3} + \frac{4}{9} \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \left( 32 \ln 2 - \frac{28}{3} \right) \quad (\text{on a utilisé } 4^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{4})^3 = 8) \end{aligned}$$

où on a posé  $u'(s) = \sqrt{s}$ ;  $v(s) = \ln s$ ;  $u(s) = \frac{2}{3} s^{\frac{3}{2}}$  et  $v'(s) = \frac{1}{s}$ .

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_1^e z^2 (\ln z)^3 dz = \left[ \frac{1}{3} z^3 (\ln z)^3 \right]_1^e - \int_1^e z^2 (\ln z)^2 dz = \frac{e^3}{3} - \left[ \frac{1}{3} z^3 (\ln z)^2 \right]_1^e + \frac{2}{3} \int_1^e z^2 \ln z dz \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{3} + \left[ \frac{2}{9} z^3 \ln z \right]_1^e - \frac{2}{9} \int_1^e z^2 dz = \frac{2}{9} e^3 - \frac{2}{9} \left[ \frac{1}{3} z^3 \right]_1^e = \frac{2}{9} e^3 - \frac{2}{27} e^3 + \frac{2}{27} = \frac{4e^3 + 2}{27} \end{aligned}$$

où on a posé  $u'(z) = z^2$ ;  $v(z) = (\ln z)^3$ ;  $u(z) = \frac{1}{3} z^3$  et  $v'(z) = \frac{3}{z} (\ln z)^2$

puis  $u'(z) = z^2$ ;  $v(z) = (\ln z)^2$ ;  $u(z) = \frac{1}{3} z^3$  et  $v'(z) = \frac{2}{z} \ln z$

et enfin  $u'(z) = z^2$ ;  $v(z) = \ln z$ ;  $u(z) = \frac{1}{3} z^3$  et  $v'(z) = \frac{1}{z}$ .

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_1^{e^2} (2x^3 + 1) \ln x dx = \left[ \left( \frac{1}{2} x^4 + x \right) \ln x \right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \frac{1}{2} x^3 + 1 dx = e^8 + 2e^2 - \left[ \frac{1}{8} x^4 + x \right]_1^{e^2} \\ &= e^8 + 2e^2 - \frac{1}{8} e^8 - e^2 + \frac{1}{8} + 1 = \frac{7}{8} e^8 + e^2 + \frac{9}{8} \end{aligned}$$

où on a posé  $u'(x) = 2x^3 + 1$ ;  $v(x) = \ln x$ ;  $u(x) = \frac{1}{2} x^4 + x$  et  $v'(x) = \frac{1}{x}$ .

$$\begin{aligned} I_5 &= \int_0^1 (1+x+x^2) e^{2x} dx = \left[ \frac{1}{2} (1+x+x^2) e^{2x} \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 (1+2x) e^{2x} dx = \frac{3}{2} e^2 - \frac{1}{2} - \left[ \frac{1}{4} (1+2x) e^{2x} \right]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} dx \\ &= \frac{3}{2} e^2 - \frac{1}{2} - \frac{3}{4} e^2 + \frac{1}{4} + \left[ \frac{1}{4} e^{2x} \right]_0^1 = \frac{3}{4} e^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} e^2 - \frac{1}{4} = e^2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

où on a posé  $u'(x) = e^{2x}$ ;  $v(x) = 1+x+x^2$ ;  $u(x) = \frac{1}{2} e^{2x}$  et  $v'(x) = 1+2x$

puis  $u'(x) = e^{2x}$ ;  $v(x) = 1+2x$ ;  $u(x) = \frac{1}{2} e^{2x}$  et  $v'(x) = 2$ .

$$\begin{aligned} I_6 &= \int_1^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{t} \right) dt = \left[ t \ln \left( 1 + \frac{1}{t} \right) \right]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{1+t} dt = 2 \ln \frac{3}{2} - \ln 2 + [\ln(1+t)]_1^2 \\ &= 2 \ln 3 - 3 \ln 2 + \ln 3 - \ln 2 = 2 \ln 3 - 4 \ln 2 \end{aligned}$$

où on a posé  $u'(t) = 1$ ;  $v(t) = \ln(1 + \frac{1}{t})$ ;  $u(t) = t$  et  $v'(t) = -\frac{1}{t^2(1 + \frac{1}{t})} = -\frac{1}{t(t+1)}$ .

$$I_7 = \int_1^2 (1+2s) \ln\left(1 + \frac{1}{s}\right) ds = \left[ s(s+1) \ln\left(1 + \frac{1}{s}\right) \right]_1^2 + \int_1^2 1 ds = 6 \ln \frac{3}{2} - 2 \ln 2 + 1 = 6 \ln 3 - 8 \ln 2 + 1$$

où on a posé  $u'(s) = 1 + 2s$ ;  $v(s) = \ln\left(1 + \frac{1}{s}\right)$ ;  $u(s) = s + s^2 = s(s+1)$  et  $v'(s) = -\frac{1}{s^2(1 + \frac{1}{s})}$ .

### Exercice 3 (\*\*)

Pour  $I_1$ , on pose  $u = t + 1$ , donc  $du = dt$ , et les bornes deviennent 1 et 2 :

$$I_1 = \int_0^1 (t-2)(t+1)^5 dt = \int_1^2 (u-3)u^5 du = \left[ \frac{u^7}{7} - \frac{u^6}{2} \right]_1^2 = \frac{128}{7} - 32 - \frac{1}{7} + \frac{1}{2} = \frac{127}{7} - \frac{63}{2} = -\frac{193}{14}$$

Pour  $I_2$ , on pose  $u = t^3 + 8$ , donc  $du = 3t^2 dt$ , et les bornes deviennent 8 et 16 :

$$I_2 = \int_0^2 \frac{t^2}{t^3+8} dt = \int_8^{16} \frac{1}{3u} du = \left[ \frac{1}{3} \ln(3u) \right]_8^{16} = \frac{1}{3} (\ln 48 - \ln 24) = \frac{1}{3} (\ln 3 + 4 \ln 2 - \ln 3 - 3 \ln 2) = \frac{\ln 2}{3}$$

Pour  $I_3$ , on pose  $t = \frac{x}{x+1}$ , donc  $dt = \frac{1}{(x+1)^2}$ , et les bornes deviennent  $\frac{1}{3}$  et  $\frac{1}{2}$  :

$$I_3 = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x(x+1)} dx = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t} dt = [\ln t]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} = \ln \frac{1}{3} - \ln \frac{1}{2} = \ln \frac{2}{3}$$

Pour  $I_4$ , on pose  $u = s^3$ , donc  $du = 3s^2 ds$ , et les bornes deviennent 1 et 8 :

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_1^2 \frac{ds}{s(s^3+1)} = \int_1^8 \frac{1}{3u(u+1)} du = \frac{1}{3} \int_1^8 \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} du \\ &= \frac{1}{3} [\ln u - \ln(u+1)]_1^8 = \frac{1}{3} (\ln 8 - \ln 9 + \ln 2) = \frac{4 \ln 2 - 2 \ln 3}{3} \end{aligned}$$

Pour  $I_5$ , on pose  $u = \sqrt{t}$ , donc  $du = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$ , et les bornes deviennent 1 et  $\sqrt{2}$  :

$$I_5 = \int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt = \int_1^{\sqrt{2}} 2 \ln(u^2) du = \int_1^{\sqrt{2}} 4 \ln u du = 4[u \ln u - u]_1^{\sqrt{2}} = 4(\sqrt{2} \ln \sqrt{2} - \sqrt{2} + 1) = 2\sqrt{2} \ln 2 + 4 - 4\sqrt{2}$$

Pour  $I_6$ , on pose  $u = \ln t$ , donc  $du = \frac{dt}{t}$ , et les bornes deviennent 0 et 1 :

$$I_6 = \int_1^e \frac{1}{t\sqrt{\ln t+1}} dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u+1}} du = [2\sqrt{u+1}]_0^1 = 2\sqrt{2} - 2 = 2(\sqrt{2} - 1)$$

### Exercice 4 (\*)

- Le plus simple est de partir du résultat et d'identifier. Comme on a  $(x+3)(x-2) = x^2 + x - 6$ , on peut écrire

$$a + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x+3} = \frac{ax^2 + ax - 6a + bx + 3b + cx - 2c}{x^2 + x - 6} = \frac{ax^2 + (a+b+c)x + (-6a+3b-2c)}{x^2 + x - 6}$$

Par identification, on a  $a = 3$  puis  $b+c = -7$  et  $3b-2c = -7$ , dont on déduit  $b = \frac{3}{2}c$  en faisant la différence puis  $b = -\frac{21}{5}$  et  $c = -\frac{14}{5}$ .

2. La deuxième expression permet d'obtenir une primitive :  $F(x) = 3x - \frac{21}{5} \ln(2-x) - \frac{14}{5} \ln(x+3)$ .  
Si on veut obtenir la primitive de  $f$  s'annulant en 1, il suffit de retrancher une constante égale à la valeur de la primitive précédente en 1, c'est-à-dire  $3 - \frac{14}{5} \ln 4$ .

### Exercice 5 (\*\*)

1. La fonction intégrée étant positive sur  $[0; 1]$ , la suite  $I_n$  est positive. De plus,  $\forall x \in [0; 1]$ ,  $(1-x)^n e^x \leq e$ , donc  $I_n \leq \int_0^1 \frac{e}{n!} dx = \frac{e}{n!}$ . Le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que  $I_n$  converge vers 0.
2. On effectue une IPP en dérivant l'exponentielle (pour une fois) et en primitivant la puissance :  
$$I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx = \left[ -\frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^x \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^x dx = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}.$$
3. On déduit de la question précédente que  $I_0 = \frac{1}{1!} + I_1 = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + I_2 = \dots = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k!} + I_n$ . Or, on a  $I_0 = \int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e - 1 = e - \frac{1}{0!}$ . On en déduit donc que  $e - I_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!}$ , ce qui en passant à la limite donne bien  $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!}$ .

### Exercice 6 (\*\*\*)

1. Par une intégration par parties désormais classique ( $u'(x) = x^2$ ;  $v(x) = \ln x$ ), on a  $I_1 = \int_1^e x^2 \ln x dx = \left[ \frac{x^3}{3} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3} dx = \frac{e^3}{3} - \left[ \frac{x^3}{9} \right]_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3 + 1}{9}$ .
2. Sur  $[1; e]$ ,  $0 \leq \ln x \leq 1$ , donc  $0 \leq (\ln x)^{n+1} \leq (\ln x)^n$ . On a donc  $0 \leq x^2 (\ln x)^{n+1} \leq x^2 (\ln x)^n$ , puis par intégration  $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$ . La suite  $(I_n)$  est décroissante.
3. La suite est décroissante minorée par 0, elle converge.
4. Le plus simple est d'étudier la fonction  $f : x \mapsto \ln x - \frac{x}{e}$ . On a  $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e}$ , qui est positif sur l'intervalle  $[1; e]$ . La fonction  $f$  est donc croissante sur  $[1; e]$ , et  $f(e) = 0$ , donc  $f$  est négative sur  $[1; e]$ . On en déduit que  $I_n \leq \int_1^e x^2 \left(\frac{x}{e}\right)^n = \frac{1}{e^n} \int_1^e x^{n+2} dx = \frac{1}{e^n(n+3)}$ . La majoration calculée tendant vers 0, notre cher théorème des gendarmes s'applique une nouvelle fois, et  $(I_n)$  converge vers 0.
5. Il s'agit bien sûr d'une intégration par parties, avec  $u'(x) = x^2$  et  $v(x) = (\ln x)^{n+1}$  :

$$I_{n+1} = \left[ \frac{x^3}{3} (\ln x)^{n+1} \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3} (n+1) (\ln x)^n = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n$$

En faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ , on a donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{3} I_n = \frac{e^3}{3}$ , donc  $I_n \sim \frac{e^3}{n+1} \sim \frac{e^3}{n}$ .

### Exercice 7 (\*\*)

- Si on note  $g(t) = e^{-3\sqrt{2 \ln t}}$ , et  $G$  une primitive de  $g$  sur  $]1; +\infty[$  (il faudrait changer la borne inférieure dans l'énoncé pour mettre quelque chose de plus grand que 1, par exemple 2, la fonction  $g$  n'étant pas définie pour  $x < 1$  ...), on aura (par définition de l'intégrale)  $f_1(x) =$

$G(2x) - G(2)$ , donc en utilisant la formule de dérivation des fonctions composées  $f'_1(x) = 2g(2x) = 2e^{-3\sqrt{2\ln(2t)}}$

- Même principe que ci-dessus : on note  $g(t) = \frac{1}{1+t+t^2}$  (qui est pour le coup définie sur  $\mathbb{R}$  puisque le dénominateur a un discriminant négatif), et  $G$  une primitive de  $g$ , on a alors  $f_2(x) = G(x^2) - G(x)$ , donc  $f'_2(x) = 2xg(x^2) - g(x) = \frac{2x}{1+x^2+x^4} - \frac{1}{1+x+x^2}$ .
- Posons donc  $g(t) = \sqrt{1+t^2}$  (encore une fois définie sur  $\mathbb{R}$ ) et  $G$  une primitive ;  $f_3(x) = G(-x) - G(x)$ , donc  $f'_3(x) = -g(-x) - g(x) = -\sqrt{1+(-x)^2} - \sqrt{1+x^2} = -2\sqrt{1+x^2}$
- Cette fois,  $g(t) = \frac{t}{\ln t}$  (définie sur  $]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$ ), et  $f_4$  n'est définie nulle part puisque  $-\sqrt{x}$  est toujours négatif quand la valeur existe. Inutile donc de chercher à dériver  $f_4$ .

### Exercice 8 (\*\*\*)

1. La fonction  $f$  est la primitive de  $\frac{e^x}{x}$  s'annulant en 1. Elle est donc dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  de dérivée  $f'(x) = \frac{e^x}{x}$ . Cette dérivée étant positive sur  $\mathbb{R}_+^*$ ,  $f$  y est croissante.
2. La fonction  $g$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , de dérivée  $g'(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} = \frac{e^x - 1}{x}$ . Cette dérivée est positive sur  $\mathbb{R}_+^*$ , donc  $g$  y est croissante. Comme  $g(1) = f(1) - \ln 1 = 0$ , la fonction  $g$  est donc négative sur  $]0; 1[$  et positive sur  $]1; +\infty[$  ( $f(1) = 0$  car on effectue alors une intégrale sur l'intervalle  $]1; 1[$ ).
3. D'après la question précédente, on a  $f(x) \leq \ln x$  sur  $]0; 1[$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ ; de même,  $f(x) \geq \ln x$  si  $x \geq 1$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

### Exercice 9 (\*\* à \*\*\*)

- Le but est donc de faire apparaître une somme de Riemann, ce qui consiste en gros à sortir un  $\frac{1}{n}$  de la somme et à exprimer ce qui reste dans la somme en fonction de  $\frac{k}{n}$  uniquement :

$$u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{n^2 + k^2} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{n^2(1 + (\frac{k}{n})^2)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\frac{k}{n}}{1 + (\frac{k}{n})^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right), \text{ avec } f(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

Le théorème de convergence des sommes de Riemann permet alors d'affirmer que  $(u_n)$  converge et que sa limite vaut  $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \left[ \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$ .

- Même méthode :  $v_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2k}{n}}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ , avec  $f(x) =$

$$\frac{1}{\sqrt{1+2x}}, \text{ donc } (v_n) \text{ converge vers } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+2x}} dx = [\sqrt{1+2x}]_0^1 = \sqrt{3} - 1.$$

- Pour  $w_n$ , c'est un peu plus subtil, il vaut mieux étudier  $\ln(w_n)$  et surtout se rendre compte que  $\ln(n!) = \ln(1 \times 2 \times \dots \times n) = \ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n$ . On a alors :

$$\ln w_n = \frac{1}{n} (\ln((2n)!) - n \ln n - \ln(n!)) = \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^{k=2n} \ln k - n \ln n - \sum_{k=1}^{k=n} \ln k \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{k=2n} (\ln k -$$

$$\ln n) = \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{k=2n} \ln \frac{k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \ln \frac{n+k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \ln \left( 1 + \frac{k}{n} \right), \text{ donc } (\ln w_n) \text{ converge vers } \int_0^1 \ln(1 +$$

$$x) dx = \int_1^2 \ln u du = [x \ln x - x]_1^2 = 2 \ln 2 - 1, \text{ et } (w_n) \text{ converge vers } e^{2 \ln 2 - 1} = \frac{4}{e}.$$

## Exercice 10 (EDHEC 2004) (\*\*)

- Il suffit pour cela de dire que le dénominateur  $1+t+t^n$  ne s'annule jamais sur l'intervalle  $[0;1]$  (il est toujours supérieur à 1), donc que la fonction à intégrer est continue sur  $[0;1]$ , ce qui assure l'existence de son intégrale.
- Calculons donc :  $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{2+t} dt = [\ln(2+t)]_0^1 = \ln 3 - \ln 2$ ; et  $u_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+2t} dt = \left[ \frac{1}{2} \ln(1+2t) \right]_0^1 = \frac{\ln 3}{2}$ .
- Pour tout  $t$  dans  $[0;1]$ , on a  $t^{n+1} \leq t^n$ , donc  $1+t+t^{n+1} \leq 1+t+t^n$  puis (tout étant positif)  $\frac{1}{1+t+t^{n+1}} \geq \frac{1}{1+t+t^n}$ . En intégrant cette inégalité entre 0 et 1, on obtient  $u_{n+1} \geq u_n$ , la suite  $(u_n)$  est donc croissante.
  - Il faut réussir à majorer intelligemment ce qui se trouve sous l'intégrale, en l'occurrence en constatant que  $\forall t \in [0;1]$ ,  $1+t+t^n \geq 1+t$ , donc  $\frac{1}{1+t+t^n} \leq \frac{1}{1+t}$ . En intégrant l'inégalité, on obtient  $u_n \leq \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln 2$ .
  - La suite  $(u_n)$  est donc croissante et majorée, elle converge.
- En utilisant le calcul fait un peu plus haut, on a  $\ln 2 - u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n} dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t+t^n} dt$ .
  - Il suffit d'arriver à majorer ce qui se trouve sous l'intégrale :  $\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t+t^n} = \frac{1+t+t^n - (1+t)}{(1+t)(1+t+t^n)} = \frac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)}$ . Or, ce magnifique dénominateur est certainement plus grand que 1 quand  $t \in [0;1]$ , donc  $\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t+t^n} \leq t^n$ , et en intégrant cette inégalité on a  $\ln 2 - u_n \leq \int_0^1 t^n dt = \left[ \frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$ .
  - On a vu plus haut que  $u_n \leq \ln 2$ , donc  $\ln 2 - u_n \geq 0$ . Comme on vient de majorer par ailleurs cette même expression par quelque chose qui tend vers 0, un coup de théorème des gendarmes nous donne  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln 2 - u_n) = 0$ , c'est-à-dire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln 2$ .

## Exercice 11 (ESCP 92) (\*\*\*\*)

- Prenons deux réels  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  tels que  $x < y$ . On a alors  $e^{-tx} > e^{-ty}$  pour tout  $t \in [0;1]$ . De même  $t^k e^{-tx} > t^k e^{-ty}$  et on peut intégrer cette inégalité, ce qui donne exactement  $f_k(x) > f_k(y)$ , donc  $f_k$  est bien décroissante.
  - On a  $f_k(0) = \int_0^1 t^k dt = \frac{1}{k+1}$ . La suite  $(f_k(0))$  est donc décroissante et tend vers 0. Or,  $f_k$  étant positive et décroissante sur  $\mathbb{R}^+$ , on a  $\forall x > 0$ ,  $0 \leq f_k(x) \leq \frac{1}{k+1}$ , ce qui suffit à assurer via le théorème des gendarmes que  $(f_k(x))_{k \in \mathbb{N}^*}$  converge vers 0.
- Il s'agit de faire une IPP en posant  $u(t) = t^{k+1}$  et  $v'(t) = e^{-tx}$ , donc  $u'(t) = (k+1)t^k$  et  $v(t) = -\frac{e^{-tx}}{x}$  (faites bien gaffe que la variable ici est  $t$  et  $x$  est donc une constante). On obtient  $f_{k+1}(x) = \left[ -t^{k+1} \frac{e^{-tx}}{x} \right]_0^1 + (k+1) \int_0^1 t^k \frac{e^{-tx}}{x} dx = -\frac{e^{-x}}{x} + \frac{k+1}{x} f_k(x)$ .

- (b) On a  $f_0(x) = \int_0^1 e^{-tx} dt = \left[ -\frac{e^{-tx}}{x} \right]_0^1 = -\frac{e^{-x}}{x} + \frac{1}{x} = \frac{1 - e^{-x}}{x}$ . On peut utiliser la question précédente pour calculer les fonctions suivantes :  $f_1(x) = \frac{1}{x}f_0(x) - \frac{e^{-x}}{x} = \frac{1}{x^2}(1 - e^{-x} - xe^{-x})$ , puis  $f_2(x) = \frac{2}{x}f_1(x) - \frac{e^{-x}}{x} = \frac{1}{x^3}(2 - 2e^{-x} - 2xe^{-x} - x^2e^{-x})$ .
- (c) Il suffit de reprendre l'expression trouvée :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - e^{-x} = 1$ , donc  $f_0 \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ .
- (d) Il faut faire une récurrence : on vient de montrer le résultat pour  $k = 0$ . Supposons le vrai pour  $f_k$ , on a alors  $f_{k+1}(x) = \frac{f_k(x)}{x} \left( k + 1 - \frac{e^{-x}}{f_k(x)} \right)$ . La parenthèse tend vers  $k + 1$  car l'exponentielle négative, par croissance comparée, l'emporte sur  $f_k$  qui est par hypothèse de récurrence équivalente à une fonction puissance. On a donc  $f_{k+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{k+1}{x} f_k \sim \frac{k+1}{x} \frac{k!}{x^{k+1}} \sim \frac{(k+1)!}{x^{k+2}}$ , ce qui achève la récurrence.
3. (a) Le changement de variable est  $u = tx$ , qui donne  $du = x dt$ , et change les bornes de l'intégrale en 0 et  $x$ , ce qui donne donc  $f_k(x) = \int_0^1 t^k e^{-tx} dt = \int_0^x \left(\frac{u}{x}\right)^k e^{-u} \frac{du}{x} = \frac{1}{x^{k+1}} \int_0^x u^k e^{-u} du$ .
- (b) On vient décrire  $f_k(x)$  sous la forme d'un produit  $g(x)h(x)$ , où  $g(x) = \frac{1}{x^{k+1}}$ , et donc  $g'(x) = -\frac{k+1}{x^{k+2}}$ , et  $h(x) = \int_0^x u^k e^{-u} du$ , donc  $h'(x) = x^k e^{-x}$ . On en déduit que  $f'_k(x) = -\frac{k+1}{x^{k+2}}h(x) + \frac{1}{x^{k+1}}x^k e^{-x} = -\frac{k+1}{x}f_k(x) + \frac{e^{-x}}{x}$ . On vient donc de montrer, en reprenant le résultat de la question 2.a, que  $f'_k = -f_{k+1}$ .
- (c) On étudie la fonction  $y \mapsto 1 - e^{-y} - y$  sur  $\mathbb{R}^+$ . sa dérivée vaut  $e^{-y} - 1$ , qui est négative sur l'intervalle d'étude. Or, pour  $y = 0$ , la fonction est nulle. Elle est donc bien négative sur  $\mathbb{R}^+$ .
- On a donc  $f_k(x) - f_k(0) = \int_0^1 t^k e^{-tx} dt - \int_0^1 t^k dt = \int_0^1 t^k (e^{-tx} - 1) dt \geq \int_0^1 t^{k+1} x dt = \frac{x}{k+2}$ . Quand  $x$  tend vers 0, ceci tend vers 0. Comme par ailleurs  $f_k(x) - f_k(0)$  est négatif puisque  $f_k$  est décroissante, la fonction  $f_k$  est bien continue en 0.
- Pour la dérivée, on utilise ce bon vieux théorème du prolongement  $C^1$ ! La fonction  $f_k$  est dérivable et  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , de dérivée  $f'_k = -f_{k+1}$ . On vient de voir que  $f_{k+1}$  était continue en 0, donc  $\lim_{x \rightarrow 0} f_{k+1}(x) = f_{k+1}(0) = \frac{1}{k+2}$ . On en déduit que  $\lim_{x \rightarrow 0} f'_k(x) = -\frac{1}{k+2}$  puis que  $f_k$  est dérivable en 0, de dérivée  $f'_k(0) = -\frac{1}{k+2}$ .