

# Feuille d'exercices n°21 : Intégration

ECE3 Lycée Carnot

8 avril 2011

## Exercice 1 (\* à \*\*)

Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} \bullet I_1 &= \int_1^2 \frac{t-1}{t^2} dt & \bullet I_2 &= \int_e^3 \frac{dx}{x \ln x} & \bullet I_3 &= \int_1^2 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx & \bullet I_4 &= \int_0^2 |x^2 - 3x + 2| dx \\ \bullet I_5 &= \int_0^4 \sqrt{x}(x - 2\sqrt{x}) dx & \bullet I_6 &= \int_0^2 z^4 e^{-z^5} dz & \bullet I_7 &= \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{5}{2}} E(x) dx \\ \bullet I_8 &= \int_1^e \frac{(\ln s)^5}{s} ds & \bullet I_9 &= \int_0^{\frac{\ln 2}{2}} \frac{e^{2t}}{e^{2t} + 2} dt & \bullet I_{10} &= \int_0^2 x^2(x^3 + 1)^{\frac{3}{2}} dx \\ \bullet I_{11} &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\exp(\frac{-3}{v^2})}{v^3} dv & \bullet I_{12} &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1-q}{(q^2 - 2q)^4} dq & \bullet I_{13} &= \int_1^4 \frac{e^{-\sqrt{z}}}{\sqrt{z}} dz \end{aligned}$$

## Exercice 2 (\*\*)

Calculer à l'aide d'intégrations par parties les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} \bullet I_1 &= \int_{-1}^1 x e^{3x} dx & \bullet I_2 &= \int_1^4 \sqrt{3s} \ln s ds & \bullet I_3 &= \int_1^e z^2 (\ln z)^3 dz \\ \bullet I_4 &= \int_1^{e^2} (2x^3 + 1) \ln x dx & \bullet I_5 &= \int_0^1 (1 + x + x^2) e^{2x} dx \\ \bullet I_6 &= \int_1^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{t} \right) dt & \bullet I_7 &= \int_1^2 (1 + 2s) \ln \left( 1 + \frac{1}{s} \right) ds \end{aligned}$$

## Exercice 3 (\*\*)

Calculer en utilisant le changement de variable indiqué (ou un changement de variable affine si rien n'est indiqué) les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} \bullet I_1 &= \int_0^1 (t-2)(t+1)^5 dt & \bullet I_2 &= \int_0^2 \frac{t^2}{t^3 + 8} dt & & \text{(poser } u = t^3 + 8) \\ \bullet I_3 &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x(x+1)} dx & & & & \text{(poser } t = \frac{x}{x+1}) \\ \bullet I_4 &= \int_1^2 \frac{ds}{s(s^3 + 1)} & & & & \text{(poser } u = s^3 \text{ et calculer } \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u}) \\ \bullet I_5 &= \int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt & & & & \text{(poser } u = \sqrt{t}) \\ \bullet I_6 &= \int_1^e \frac{dt}{t\sqrt{\ln t + 1}} & & & & \text{(poser } u = \ln t) \end{aligned}$$

## Exercice 4 (\*)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $] -3; 2[$  par  $f(x) = \frac{3x^2 - 4x - 25}{x^2 + x - 6}$ .

1. Montrer qu'on peut écrire  $f$  sous la forme  $f(x) = a + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x+3}$ .
2. En déduire l'expression de la primitive de  $f$  s'annulant en 1.

### Exercice 5 (\*\*)

On s'intéresse à la suite d'intégrales définie par  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx$ .

1. Montrer que la suite  $(I_n)$  converge vers 0.
2. Montrer que  $I_n = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$ .
3. En déduire que  $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ .

### Exercice 6 (\*\*\*)

On définit, pour tout entier  $n$ , l'intégrale  $I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx$ .

1. Calculer  $I_1$ .
2. Montrer que sur  $[1; e]$ , on a  $(\ln x)^{n+1} \leq (\ln x)^n$ , et en déduire le sens de variation de  $I_n$ .
3. Montrer que  $(I_n)$  est convergente.
4. Montrer que sur  $[1; e]$ ,  $0 \leq \ln x \leq \frac{x}{e}$ . En déduire la limite de  $I_n$ .
5. Montrer que  $\forall n \geq 1$ ,  $I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n$ . En déduire un équivalent de  $I_n$ .

### Exercice 7 (\*\*)

Dériver chacune des fonctions suivantes :

- $f_1(x) = \int_0^{2x} e^{-3\sqrt{2}\ln t} dt$
- $f_2(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{1+t+t^2} dt$
- $f_3(x) = \int_{-x}^x \sqrt{1+t^2} dt$
- $f_4(x) = \int_{-\sqrt{x}}^{e^x} \frac{t}{\ln t} dt$

### Exercice 8 (\*\*\*)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par  $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$ .

1. Montrer que  $f$  est dérivable et déterminer sa dérivée. En déduire le tableau de variations de  $f$ .
2. On pose désormais  $g(x) = f(x) - \ln x$ . Étudier les variations de  $g$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et en déduire son signe.
3. Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition.

### Exercice 9 (\*\*) à (\*\*\*)

Déterminer les limites de chacune des suites suivantes en utilisant des sommes de Riemann.

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2} \quad v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}} \quad w_n = \left( \frac{(2n)!}{n^n n!} \right)^{\frac{1}{n}}$$

### Exercice 10 (EDHEC 2004) (\*\*)

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n} dt$ .

1. Pour tout  $n$  appartenant à  $\mathbb{N}$ , justifier l'existence de  $u_n$ .
2. Calculer  $u_0$  et  $u_1$ .
3. (a) Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.  
(b) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ln 2$ .  
(c) En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente.
4. (a) Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , écrire  $\ln 2 - u_n$  sous la forme d'une intégrale.  
(b) En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \ln 2 - u_n \leq \frac{1}{n+1}$ .  
(c) Donner la limite de la suite  $(u_n)$ .

### Exercice 11 (ESCP 92) (\*\*\*\*)

Pour tout entier naturel  $k$  on considère la fonction  $f_k$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  par la relation

$$f_k(x) = \int_0^1 t^k e^{-tx} dt$$

1. (a) Montrer que pour tout entier naturel  $k$ , la fonction  $f_k$  est décroissante sur  $\mathbb{R}^+$ .  
(b) Etudier la suite  $(f_k(0))_{k \geq 0}$ . En déduire, pour tout réel positif  $x$ , la limite de la suite  $(f_k(x))_{k \geq 0}$ .
2. (a) Soit  $x > 0$ . Etablir que  $f_{k+1}(x) = \frac{k+1}{x} f_k(x) - \frac{e^{-x}}{x}$  pour tout  $k \geq 0$ .  
(b) Expliciter les fonctions  $f_0, f_1$  et  $f_2$ .  
(c) Montrer que,  $f_0(x) \underset{+\infty}{\sim} 1/x$ .  
(d) A l'aide de la relation établie au c), montrer que pour tout  $k, f_k(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{k!}{x^{k+1}}$ .
3. (a) En effectuant un changement de variable, montrer que  $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x > 0, f_k(x) = \frac{1}{x^{k+1}} \int_0^x u^k e^{-u} du$ .  
En déduire que  $f_k$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et calculer sa dérivée.  
(b) Trouver une relation simple entre  $f'_k$  et  $f_{k+1}$ .  
(c) Montrer que pour tout réel  $\forall y \geq 0, 1 - e^{-y} \leq y$ . En déduire que pour tout entier naturel  $k$ , la fonction  $f_k$  est continue en 0. Est-elle dérivable à droite en ce point ?