Feuilles d'exercices n°2 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

15 septembre 2009

Exercice 1 (*)

1. Il faut résoudre l'inéquation $x^2 - x - 2 \geqslant 0$. Le trinome correspondant a pour discriminant $\Delta = 1 + 8 = 9$, donc admet deux racines réelles $x_1 = \frac{1+3}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{1-3}{2} = -1$. Le trinome étant positif en-dehors des racines, $\mathcal{D}_f =]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[$.
2. L'exponentielle est là pour faire joli, ce qui est important c'est d'avoir $2x+3 > 0$, soit $x > -\frac{3}{2}$, donc $\mathcal{D}_f = \left]-\frac{3}{2}; +\infty\right[$.
3. Le dénominateur interdit les valeurs -1 et 1. Reste à vérifier quand le numérateur est positif. C'est le cas en-dehors de ses racines 0 et -1, donc $\mathcal{D}_f =]-\infty; -1[\cup[0; 1[\cup]1; +\infty[$.
4. Il faut déterminer quand $x^5 + 1 > 0$, autrement dit quand $x^5 > -1$. Or, on sait que $x \mapsto x^5$ est une fonction strictement croissante, et que $(-1)^5 = -1$, donc $x^5 > -1 \Leftrightarrow x > -1$ et $\mathcal{D}_f =]-1; +\infty[$.

Exercice 2 (* à **)

1. La fonction f n'est ni paire ni impaire (à cause du $+1$). Pour le prouver de façon rigoureuse, le plus simple est de trouver une valeur de x pour laquelle on n'a ni $f(-x) = f(x)$, ni $f(-x) = -f(-x)$. Ici, par exemple, $f(2) = 61$ et $f(-2) = -59$, ce qui est incompatible avec le fait que f soit paire ou impaire.
2. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et paire puisque $\forall x \neq 0$, $f(-x) = \ln(|-x|) = \ln(|x|) = f(x)$.
3. Cette fonction très laide est paire : elle est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-\sqrt{2}; 0; \sqrt{2}\}$ (ce qui est sous la racine est toujours strictement positif ; par contre les trois valeurs enlevées annulent le premier dénominateur) et $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = \frac{1}{((-x)^3 - 2 \times (-x))^2} \times \frac{(-x)^4}{\sqrt{(-x)^2+2}} = \frac{1}{(2x-x^3)^2} \times \frac{x^4}{\sqrt{x^2+2}} = f(x)$ car $(2x - x^3)^2 = (x^3 - 2x)^2$ (prendre la carré d'un nombre ou de son opposé donne toujours le même résultat).
4. Cette fonction est définie sur $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$, et elle est paire : $f(-x) = |2(-x)^2 - e^{(-x)^4} + \ln((-x)^2 - 1)| = |2x^2 - e^{x^4} + \ln(x^2 - 1)| = f(x)$.
5. Cette dernière fonction est définie sur $]-1; 1[$, et elle est impaire : $f(-x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -f(x)$ (on a simplement utilisé le fait que $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$).

Exercice 3 (* à **)

1. $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$; on a donc $f(1) = 1 + \ln 2$ et $f'(1) = \dfrac{1}{2}$, et l'équation de la tangente recherchée est $y = \dfrac{1}{2}(x-1) + 1 + \ln 2 = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2} + \ln 2$.
2. $f'(x) = \dfrac{1+e^x - e^x(1+x)}{(1+e^x)^2} - 1 = \dfrac{1-xe^x}{(1+e^x)^2} - 1$ (inutile de s'embêter à mettre au même dénominateur si on n'a pas l'intention d'étudier ensuite les variations de la fonction). On a donc $f(1) = \dfrac{2}{1+e} - 1 = \dfrac{1-e}{1+e}$ et $f'(1) = \dfrac{1-e}{(1+e)^2} - 1 = -\dfrac{e(e+3)}{(1+e)^2}$, donc l'équation de la tangente est $y = -\dfrac{e(e+3)}{(1+e)^2}(x-1) + \dfrac{1-e}{1+e} = -\dfrac{e(e+3)}{(1+e)^2}x + \dfrac{e(e+3)+(1-e)(1+e)}{(1+e)^2} = -\dfrac{e(e+3)}{(1+e)^2}x + \dfrac{3e+1}{(1+e)^2}$.
3. $f'(x) = \dfrac{2+\frac{3}{x^2}}{2x - \frac{3}{x}} = \dfrac{2x^2+3}{x(2x^2-3)}$. La fonction n'étant pas définie en 1, on ne peut pas calculer l'équation d'une tangente qui n'existe pas !
4. $f'(x) = \dfrac{2e^{2x}(x^2-1) - 2xe^{2x}}{(x^2-1)^2} = \dfrac{2(1-x)e^{2x}}{(x^2-1)^2}$. Cette fonction n'étant même pas définie en 1, elle ne risque pas d'y admettre une tangente, donc on peut arrêter là pour les calculs.
5. On a $f(x) = e^{\frac{1}{x}\ln x}$, donc $f'(x) = \left(-\dfrac{1}{x^2}\ln x + \dfrac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}\ln x} = \dfrac{1-\ln x}{x^2}x^{\frac{1}{x}}$. On a donc $f(1) = 1$ et $f'(1) = 0$, la tangente est donc horizontale d'équation $y = 1$.

Exercice 4 (** à ***)

1. Le plus efficace est de tout regrouper sous un seul ln de chaque côté, même si les calculs sont assez moches (on se souciera exceptionnellement du domaine de définition après le calcul) :

$$\begin{array}{rcl} \ln((x+1)^2) + \ln(3x+5) + \ln 2 & = & \ln(6x+1) + \ln((x-2)^2) \\ \ln(2(x^2+2x+1)(3x+5)) & = & \ln((6x-1)(x^2-4x+4)) \\ 6x^3 + 22x^2 + 26x + 10 & = & 6x^3 - 25x^2 + 28x - 4 \\ 47x^2 - 2x + 14 & = & 0 \end{array}$$

   Le discriminant de l'équation du second degré que nous obtenons étant très négatif, il n'y a pas de solution réelle, donc $\mathcal{S} = \emptyset$.
2. En faisant passer quelques termes à droite, on obtient $2^{3x-1} = 5^{x+1} - 5^x = 5^x(5-1) = 4 \times 5^x$, soit en prenant le ln des deux côtés $(3x-1)\ln 2 = \ln 4 + x\ln 5$, donc $x(3\ln 2 - \ln 5) = 3\ln 2$, et $x = \dfrac{3\ln 2}{3\ln 2 - \ln 5}$, donc $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{3\ln 2}{3\ln 2 - \ln 5}\right\}$.
3. Cette équation n'a de sens que si $x > 0$ (on peut éventuellement extrapoler que 0 va aussi être solution de l'équation, si on arrive à donner un sens à 0^0). En prenant les ln, on obtient alors $\sqrt{x}\ln x = x\ln(\sqrt{x}) = x\dfrac{\ln x}{2}$, donc $\ln x\left(\sqrt{x} - \dfrac{x}{2}\right) = 0$. On en déduit que soit $\ln x = 0$, c'est-à-dire $x = 1$, soit $\sqrt{x} = \dfrac{x}{2}$, auquel cas on obtient en élevant au carré (on peut, tout est positif) $x = \dfrac{x^2}{4}$, soit $x(x-4) = 0$, donc $x = 4$ (0 ayant été exclu dès le départ). Conclusion : $\mathcal{S} = \{1; 4\}$.
4. Celle-ci est un piège assez vicieux. On ne sait pas vraiment résoudre ce genre d'équation, mais on peut constater que $x \mapsto x^{\frac{1}{4}} + 2x^{\frac{5}{3}} - 3$ est une fonction strictement croissante sur son domaine de définition $]0; +\infty[$, et qu'elle prend pour valeur 0 en 1. Elle ne peut donc pas s'annuler plus d'une fois et $\mathcal{S} = \{0\}$.

5. Ca doit presque être un réflexe pour ce genre d'équations : on pose $X = e^{-2x}$ et on obtient $X^3+3X^2-X-3=0$. On constate (comme d'habitude) que 1 est racine évidente de l'équation, et on peut donc écrire $(X^3+3X^2-X-3) = (X-1)(aX^2+bX+c) = aX^3+(b-a)X^2+(c-b)X-c$, soit après identification $a=1$; $b=4$ et $c=3$. Reste à résoudre $X^2+4X+3=0$, équation ayant pour discriminant $\Delta = 16-12 = 4$ et pour racines réelles $X_1 = \dfrac{-4+2}{2} = -1$ et $X_2 = \dfrac{-4-2}{2} = -3$. Ces deux dernières valeurs n'étant pas très compatibles avec le changement de variable effectué, la seule possibilité restante est $e^{-2x} = 1$, ce qui donne $x=0$, donc $\mathcal{S} = \{0\}$.
6. Posons $X = 8^{3x}$, on cherche alors à résoudre $X^2-3X-4 \leqslant 0$, inéquation ayant pour discriminant $\Delta = 9+16 = 25$, soit deux racines réelles $X_1 = \dfrac{3-5}{2} = -1$ et $X_2 = \dfrac{3+5}{2} = 4$. On doit donc avoir $-1 \leqslant 8^{3x} \leqslant 4$. La première inégalité est toujours vérifiée, puisque la puissance est nécessairement positive. Quant à la deuxième, elle devient, en passant au ln, $3x \ln 8 \leqslant \ln 4$, soit $x \leqslant \dfrac{\ln 8}{3\ln 4}$. Comme $\dfrac{\ln 4}{3\ln 8} = \dfrac{2\ln 2}{9\ln 2} = \dfrac{2}{9}$, on a donc $\mathcal{S} = \left]-\infty; \dfrac{2}{9}\right]$.
7. La deuxième équation du système peut se traduire par $\log(xy) = 4$, soit, en passant à l'exponentielle de base 10, $xy = 10^4 = 10\ 000$. Les réels x et y sont alors solutions de l'équation $x^2 - 520x + 10\ 000 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 520^2 - 40\ 000 = 230\ 400$, et admet deux racines réelles $x_1 = \dfrac{520-480}{2} = 20$ et $x_2 = \dfrac{520+480}{2} = 500$ (notez qu'on peut facilement vérifier que ces deux nombres sont solutions du problème posé). On a donc $\mathcal{S} = \{(20; 500); (500; 20)\}$.

Exercice 5 (**)

1. La fonction $x \mapsto -2x+3$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, et l'exponentielle est strictement croissante, donc la composée $x \mapsto e^{-2x+3}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. De plus, elle est à valeurs dans $]0; +\infty[$ (une exponentielle est toujours positive), intervalle sur lequel la fonction inverse est décroissante. Conclusion : $x \mapsto \dfrac{1}{e^{-2x+3}}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme on multiplie ceci par $-\dfrac{5}{2}$, le sens de variation change encore une fois, et f est finalement décroissante sur $\mathbb{R}$.
2. Soustraire 3 à la fin ne changera pas le sens de variation, concentrons-nous donc sur le carré. La fonction $x \mapsto e^x + 2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, à valeurs strictement positives, et la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Cette fois-ci c'est différent, car $e^x - 3$ ne prend pas toujours des valeurs positives. Plus précisément $e^x - 3 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant \ln 3$. Sur $]-\infty; \ln 3]$, $x \mapsto e^x - 3$ est donc croissante et à valeurs dans $]-\infty; 0]$, intervalle sur lequel la fonction carré est décroissante. La fonction f est donc strictement décroissante sur $]-\infty; \ln 3]$. Sur $[\ln 3; +\infty[$, $x \mapsto e^x - 3$ est croissante et à valeurs positives, et cette fois f sera strictement croissante.
4. Commençons par constater que f n'est pas définie partout : $e^{-x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{-x} > 1 \Leftrightarrow x < e$. Ensuite, la fonction $x \mapsto -x$ étant strictement décroissante sur $]e; +\infty[$, et les fonctions exponentielle et ln strictement croissantes sur leurs ensembles de définition, on en déuit facilement que f est strictement décroissante sur $]e; +\infty[$
5. Notre dernière fonction est définie si $\dfrac{x+1}{x-1} > 0$, soit $\mathcal{D}_f =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ (un petit tableau de signe pour le vérifier). Pour obtenir son sens de variations, il peut être utile de faire la petite modification suivante : $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = \ln\left(\dfrac{x-1+2}{x-1}\right) = \ln\left(1 + \dfrac{2}{x-1}\right)$. La fonction $x \mapsto \dfrac{2}{x-1}$ étant strictement décroissante sur $]-\infty; -1[$ et sur $]1; +\infty[$, et le logarithme népérien

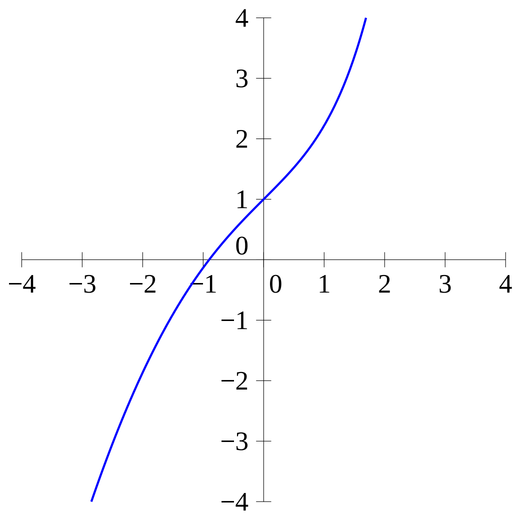
étant strictement croissant sur son ensemble de définition, la fonction f est donc strictement décroissante sur $]-\infty;-1[$, ainsi que sur $]1;+\infty[$.

Exercice 6 (* à ***)

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = e^x - x$ et de dérivée seconde $f''(x) = e^x - 1$. La fonction f'' s'annule en 0, donc on obtient pour f' le tableau de variations suivant :

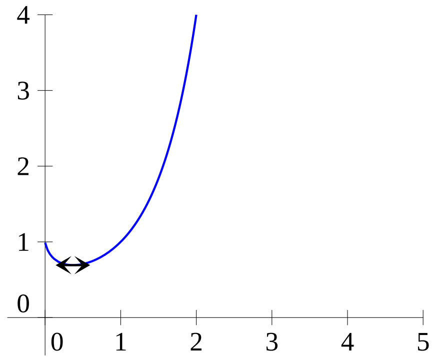
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

(les limites ne posent pas de difficulté de calcul). Comme $1 > 0$, f' est toujours strictement positive, et f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Les limites de f se calculent elles aussi assez facilement : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ (pas de forme indéterminée ici), et en $+\infty$, on peut écrire $f(x) = e^x \left(1 - \dfrac{x^2}{2e^x}\right)$, où la parenthèse a pour limite 1 par croissance comparée, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Pour tracer à la main une courbe représentative correcte, il faudrait calculer quelques points car on manque cruellement d'informations. On peut toujours constater que $f(0) = 1$. En tout cas, la courbe ressemble à ceci :



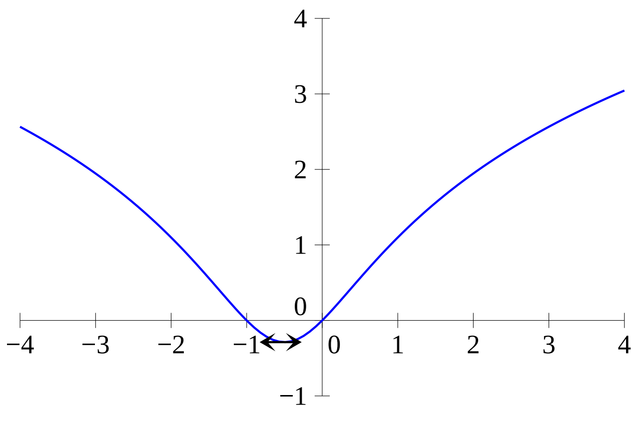
2. La fonction f est définie sur $]0;+\infty[$, et on peut l'écrire sous forme exponentielle $f(x) = e^{x \ln x}$. Elle a donc pour dérivée $f'(x) = (\ln x + 1)e^{x \ln x}$. Cette dérivée s'annule lorsque $\ln x = -1$, c'est-à-dire pour $x = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$, et f est donc décroissante sur $\left]0; \dfrac{1}{e}\right]$ et croissante sur $\left[\dfrac{1}{e}; +\infty\right[$. On peut calculer les limites de f : $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$ (croissance comparée), donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (pas de problème pour celle-là). Après avoir calculé $f\left(\dfrac{1}{e}\right) = e^{\frac{1}{e} \ln \frac{1}{e}} = e^{-\frac{1}{e}}$, on obtient le tableau de variations et la courbe suivants :

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
f	1	$\searrow$	$e^{-\frac{1}{e}}$	$\nearrow$	$+\infty$



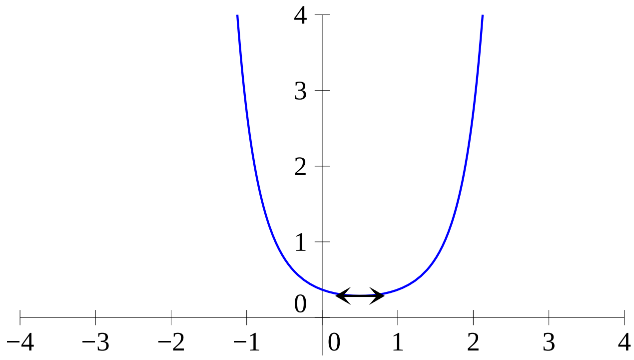
3. Intéressons-nous pour commencer au domaine de définition de f, et cherchons pour cela les racines du trinome $1 + x + x^2$. Il a pour discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3$, donc est toujours du signe de 1, à savoir positif. La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}$. Elle a pour dérivée $f'(x) = \dfrac{1+2x}{(1+x+x^2)^2}$, qui s'annule pour $x = -\dfrac{1}{2}$. Comme $\lim\limits_{x\to\pm\infty} 1 + x + x^2 = +\infty$, on a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, et de plus $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \ln\dfrac{3}{4} = \ln 3 - \ln 4$, d'où le tableau et la courbe suivants :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$\ln 3 - \ln 4$	$\nearrow$	$+\infty$



4. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = (2x-1)e^{x^2-x-1}$, qui s'annule pour $x = \dfrac{1}{2}$. Comme $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2 - x - 1 = +\infty$, on a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. De plus $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = e^{-\frac{5}{4}}$, d'où le tableau et la courbe suivants :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$e^{-\frac{5}{4}}$	$\nearrow$	$+\infty$



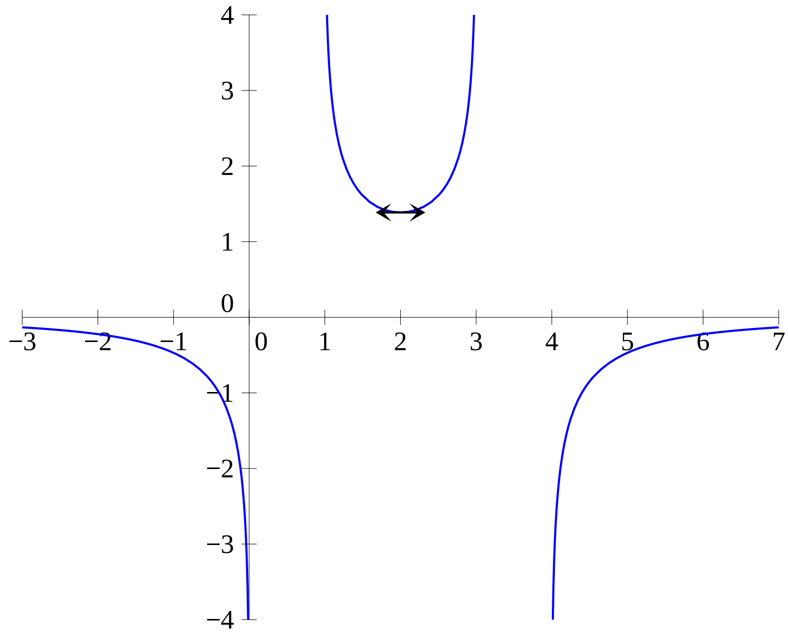
5. Il faut commencer par déterminer le domaine de définition de f, et pour cela faire un joli tableau de signes. Le dénominateur a pour discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$, et admet donc deux racines réelles $x_1 = \dfrac{4+2}{2} = 3$ et $x_2 = \dfrac{4-2}{2} = 1$. D'où le tableau :

x		0		1		3		4	
x^2-4x	$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$
x^2-4x+3	$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$
$\frac{x^2-4x}{x^2-4x+3}$	$+$	0	$-$	||	$+$	||	$-$	0	$+$

On a donc $\mathcal{D}_f =]-\infty;0[\cup]1;3[\cup]4;+\infty[$. Sur cet ensemble, f a pour dérivée $f'(x) = \dfrac{(2x-4)(x^2-4x+3)-(2x-4)(x^2-4x)}{(x^2-4x+3)^2} \times \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-4x} = \dfrac{3(2x-4)}{(x^2-4x+3)^2} \times \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-4x} = \dfrac{6(x-2)}{(x^2-4x)(x^2-4x+3)}$. Le dénominateur étant strictement positif sur $\mathcal{D}_f$ (c'est un produit au lieu d'un quotient, mais le tableau de signes est exactement celui qu'on a fait ci-dessus), f' est du signe de $x-2$. Par ailleurs, $f(2) = \ln\dfrac{-4}{-1} = 2\ln 2$

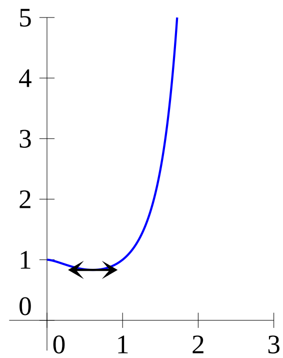
Restent quelques limites un peu pénibles à calculer. Les plus faciles sont les limites en 0 et en 4 : quand le numérateur s'annule, le quotient à l'intérieur du ln tend vers 0, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = -\infty$. En 1 et 3, c'est à peine plus compliqué : le dénominateur s'annule donc le quotient tend vers $+\infty$ (ça ne peut pas être $-\infty$ puisque f ne serait pas définie si le quotient prenait des valeurs négatives), et on en déduit que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = +\infty$. Enfin, vos souvenirs sur le calculs de limites de Terminale devraient vous permettre de vérifier que la limite du quotient en $\pm\infty$ vaut 1 (on factorise par x^2 en haut et en bas), d'où $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Ce qui nous donne un tableau et une courbe ressemblant à ceci :

x	$-\infty$		0		1		2		3		4		$+\infty$
f	0	$\searrow$	$-\infty$ ||		|| $+\infty$	$\searrow$	$2\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$ ||		|| $-\infty$	$\nearrow$	0



6. Cette fonction est définie sur $]0;+\infty[$, et s'écrit sous forme exponentielle $f(x) = e^{x^2 \ln x}$. Elle a pour dérivée $f'(x) = (2x \ln x + x)e^{x^2 \ln x} = x(2 \ln x + 1)e^{x^2 \ln x}$. Le facteur x est toujours strictement positif sur $\mathcal{D}_f$, seul compte donc le signe de $2 \ln x + 1$. Ceci s'annule pour $x = e^{-\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$. Le calcul des limites est extrêmement similaire à celui de la deuxième fonction de l'exercice, au point d'ailleurs que les limites sont les mêmes, on a $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) = e^{-\frac{1}{2e}}$ et on obtient tableau et courbe :

x	0		$\dfrac{1}{\sqrt{e}}$		$+\infty$
f	1	$\searrow$	$e^{-\frac{1}{2e}}$	$\nearrow$	$+\infty$



Exercice 7 (**)

Le plus simple pour montrer ce genre d'inégalité, c'est en fait une étude de fonction. Posons donc $f(x) = \ln x - x + 1$, fonction définie sur $]0;+\infty[$, et essayons de montrer que f est toujours positive.

Pour cela, petite étude de variations : $f'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x}$. La fonction f est donc strictement décroissante sur $]0;1]$ et strictement croissante sur $[1;+\infty[$, elle admet un minimum global en 1 de valeur $f(1) = 0 - 1 + 1 = 0$, donc elle est effectivement à valeurs positives, ce qui prouve l'inégalité demandée.

Même principe dans le deuxième cas : on pose $g(x) = (1+x)^{\frac{1}{4}} - 1 - \dfrac{x}{4} + \dfrac{3x^2}{32}$, définie sur $[0;+\infty[$. On a $g'(x) = \dfrac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{4}} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{3x}{16}$, puis $g''(x) = -\dfrac{3}{16}(1+x)^{-\frac{7}{4}} + \dfrac{3}{16} = \dfrac{3}{16}\left(1 - (1+x)^{-\frac{7}{4}}\right)$. Comme x est supposé positif, $1 + x \geqslant 1$, donc $(1+x)^{-\frac{7}{4}} \leqslant 1$ sur $\mathcal{D}_g$ et g'' est toujours positive. Autrement dit, g' est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme par ailleurs $g'(0) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4} + 0 = 0$, la fonction g' est elle-même positive sur $\mathbb{R}_+$, et g est donc croissante. Reste à vérifier que $g(0)$ est positif : $g(0) = 1 - 1 - 0 + 0 = 0$. La fonction g est donc à valeurs positives, ce qui prouve l'inégalité demandée.

Exercice 8 (* à **)

1. $|x-3| \geqslant 5$ signifie que $x - 3 \geqslant 5$ ou $x - 3 \leqslant -5$, d'où $\mathcal{S} =]-\infty;-2] \cup [8;+\infty[$.
2. $|2x-4| = |3x+2| \leftrightarrow 2x - 4 = 3x + 2$ ou $2x - 4 = -3x - 2$ soit $-x = 6$ ou $5x = 2$, et $\mathcal{S} = \left\{-6; \dfrac{2}{5}\right\}$
3. $|x^2 - 8x + 11| = 4$ revient à dire que $x^2 - 8x + 11 = 4$ ou $x^2 - 8x + 11 = -4$. Il ne reste plus qu'à résoudre ces deux équations du second degré. La première a pour discriminant $\Delta = 64 - 4 \times 7 = 36$, et admet deux racines réelles $x_1 = \dfrac{8-6}{2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{8+6}{2} = 7$. La deuxième a pour discriminant $\Delta = 64 - 4 \times 15 = 4$, et admet deux racines réelles $x_3 = \dfrac{8-2}{2} = 3$ et $x_4 = \dfrac{8+2}{2} = 5$. Finalement, $\mathcal{S} = \{1;3;5;7\}$.
4. Pas besoin de se fatiguer pour celle-là, le membre de gauche étant manifestement positif (c'et une somme de deux valeurs absolues), il ne sera jamais strictement inférieur à -2, donc $\mathcal{S} = \emptyset$.
5. Il n'y a pas de méthodes fiables pour s'en sortir par le calcul, le mieux est donc d'écrire l'inéquation sous la forme $|x-2| - |4x+2| \geqslant 0$, et de faire un « tableau de signes »pour simplifier le membre de gauche :

x	$-\infty \qquad -\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
$\lvert x-2\rvert$	$-x+2$	$-x+2$ 0	$x-2$
$\lvert 4x+2\rvert$	$-4x-2$ 0	$4x+2$	$4x+2$
$\lvert x-2\rvert - \lvert 4x+2\rvert$	$3x+4$	$-5x$	$-3x-4$

   Comme $3x + 4 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -\dfrac{4}{3}$, les réels de l'intervalle $\left[-\dfrac{4}{3};-\dfrac{1}{2}\right]$ sont solutions de l'équation initiale (on ne garde bien sûr que les valeurs de x appartenant à l'intervalle sur lequel l'expression $3x + 4$ est valide). De même, on a $-5x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant 0$, donc l'intervalle $\left[-\dfrac{1}{2};0\right]$ est aussi solution. Enfin, $-3x - 4 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -\dfrac{4}{3}$, ce qui n'ajoute pas de solutions. En regroupant le tout, on obtient donc $\mathcal{S} = \left[-\dfrac{4}{3};0\right]$.
6. Ici, difficile d'être tenté de faire quoi que ce soit d'autre qu'un tableau :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	3	7	$+\infty$
$\lvert 2x-3\rvert$	$-2x+3$	0 $2x-3$	$2x-3$	$2x-3$	
$\lvert 3-x\rvert$	$3-x$	$3-x$	0 $-3+x$	$-3+x$	
$\lvert x-7\rvert$	$-x+7$	$-x+7$	$-x+7$ 0	$x-7$	
$\lvert 2x-3\rvert+\lvert 3-x\rvert-\lvert x-7\rvert$	$-2x-1$	$2x-7$	$4x-13$	$2x+1$	

Ne restent plus qu'à résoudre pas moins de quatre équations, et à vérifier si les solutions obtenus appartiennent au bon intervalle à chaque fois : $-2x-1=2 \Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$, solution acceptable ; $2x-7=2 \Leftrightarrow x=\frac{9}{2}$, solution rejetée ; $4x-13=2 \Leftrightarrow x=\frac{15}{4}$, solution acceptable ; $2x+1=2 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$, solution rejetée. Bilan : $\mathcal{S}=\left\{-\frac{3}{2};\frac{15}{4}\right\}$.

7. $|e^x-3|<1 \Leftrightarrow -1<e^x-3<1 \Leftrightarrow 2<e^x<4 \Leftrightarrow \ln 2<x<\ln 4$, donc $\mathcal{S}=]\ln 2;\ln 4[$.
8. On peut commencer par constater que le second membre doit être positif pour que l'équation puisse avoir une solution, et donc résoudre uniquement sur $[5;+\infty[$. On a alors, en élevant au carré (tout est positif) $|x^2-1|=(x-5)^2$, soit $x^2-1=x^2-10x+25$ (la valeur absolue à gauche est superflue, ce qui est à l'intérieur est positif sur notre intervalle d'étude). Reste la très simple équation $10x=26$, dont la solution n'appartient pas à notre intervalle d'étude, d'où $\mathcal{S}=\emptyset$.

Exercice 9 (**)

1. Un petit tableau permet de régler cette question très vite :

x	$-\infty$	-5	2	$+\infty$
$\lvert x-2\rvert$	$-x+2$	$-x+2$ 0	$x-2$	
$\lvert x+5\rvert$	$-x-5$ 0	$x+5$	$x+5$	
$\lvert x-2\rvert+\lvert x+5\rvert$	$-2x-3$	7	$2x+3$	

On a donc $|x-2|+|x+5|=\begin{cases} -2x-3 & \text{si} \quad x\leqslant -5 \\ 7 & \text{si} \quad -5\leqslant x\leqslant 2 \\ 2x+3 & \text{si} \quad x\geqslant 2 \end{cases}$.

2. Cette fois-ci, il suffit d'étudier le signe du trinome à l'intérieur de la valeur absolue. Celui-ci a pour discriminant $\Delta=25-24=1$ et admet deux racines réelles $x_1=\frac{5+1}{6}=1$ et $x_2=\frac{5-1}{6}=\frac{2}{3}$, donc $|3x^2-5x+2|=3x^2-5x+2$ si $x\in\left]-\infty;\frac{2}{3}\right]\cup[1;+\infty[$, et $|3x^2-5x+2|=-3x^2+5x-2$ si $x\in\left[\frac{2}{3};1\right]$.
3. Il n'y a même pas besoin de calculs ici : $\ln(|x^2-4|)=\ln(x^2-4)$ si $x\in]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$, et $\ln(|x^2-4|)=\ln(-x^2+4)$ si $x\in]-2;2[$ (et si $x=2$ ou $x=-2$, l'expression n'est pas définie).
4. Constatons que $\sqrt{2x^2-8x+8}=\sqrt{2(x-2)^2}=|\sqrt{2}(x-2)|$. reste à faire un petit tableau :

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	2	$+\infty$
$\lvert 2-3x\rvert$	$2-3x$ 0	$-2+3x$	$-2+3x$	
$\lvert\sqrt{2}(x-2)\rvert$	$-\sqrt{2}(x-2)$	$-\sqrt{2}(x-2)$ 0	$\sqrt{2}(x-2)$	
$\lvert 2-3x\rvert+\lvert\sqrt{2}(x-2)\rvert$	$(-3+\sqrt{2})x+2-2\sqrt{2}$	$(3+\sqrt{2})x-2-2\sqrt{2}$	$(3-\sqrt{2})x-2+2\sqrt{2}$	

Je suis certain que vous serez capable de faire une jolie phrase de conclusion tous seuls si vous le souhaitez.

5. La valeur absolue du dénominateur est totalement superflue puisque celui-ci est toujours strictement positif. On a donc $\dfrac{e^{|x+1|}}{|e^{x+1}|} = \dfrac{e^{-x-1}}{e^{x+1}} = e^{-2x-2}$ si $x \leqslant -1$; et $\dfrac{e^{|x+1|}}{|e^{x+1}|} = 1$ si $x \geqslant -1$.

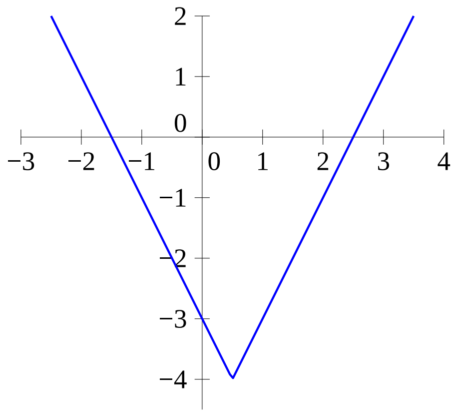
Exercice 10 (un bon ***)

1. Une façon de caractériser la partie entière est de dire qu'il s'agit de l'unique entier vérifiant $Ent(x) \leqslant x < Ent(x)+1$. Mais alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $Ent(x)+n \leqslant x+n < Ent(x)+n+1$. Le nombre $Ent(x)+n$ étant un entier (c'est la somme de deux entiers !) et vérifiant la caractérisation de $Ent(x+n)$, on a bien $Ent(x+n) = Ent(x)+n$.
2. Comme $Ent(x) \leqslant x$ et $Ent(y) \leqslant y$, on a $Ent(x)+Ent(y) \leqslant x+y$. Un entier inférieur à un réel est nécessairement inférieur à sa partie entière, donc $Ent(x)+Ent(y) \leqslant Ent(x+y)$. Par contre, il n'y a pas toujours égalité : prenons par exemple $x = 1,7$ et $y = 2,9$, alors $Ent(x)+Ent(y) = 1+2 = 3$, mais $Ent(x+y) = Ent(4,6) = 4$.
3. Notons pour simplifier $p = Ent(x)$. On a donc $p \leqslant x \leqslant p+1$, d'où $\dfrac{p}{2} \leqslant \dfrac{x}{2} \leqslant \dfrac{p+1}{2}$, et $\dfrac{p+1}{2} \leqslant \dfrac{x+1}{2} \leqslant \dfrac{p+2}{2}$. Si p est un entier pair, alors $\dfrac{p}{2}$ et $\dfrac{p+2}{2}$ sont deux entiers consécutifs, et $Ent\left(\dfrac{x}{2}\right) = Ent\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = \dfrac{p}{2}$ et leur somme vaut bien p. Si p est impair, par contre, $\dfrac{p+1}{2}$ est un entier, et l'entier qui lui est juste inférieur est $\dfrac{p-1}{2}$. On a alors $Ent\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{p-1}{2}$, et $Ent\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = \dfrac{p+1}{2}$, mais la somme de ces deux nombres vaut toujours p ! Dans les deux cas, l'égalité est donc vérifiée.
4. Notons encore une fois p la partie entière de x, et q celle de nx. Comme $p \leqslant x < p+1$, on a $np \leqslant nx < n(p+1)$, donc $np \leqslant q < n(p+1)$. Il en résulte que $p \leqslant \dfrac{q}{n} < p+1$, ce qui prouve exactement que $Ent\left(\dfrac{Ent(nx)}{n}\right) = p$.

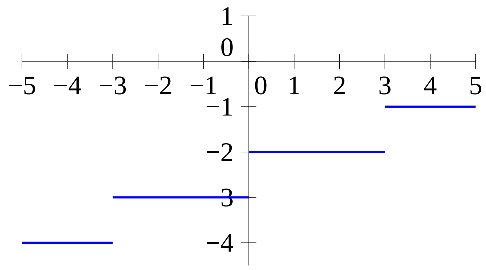
Exercice 11 (** à ***)

1. La fonction $x \mapsto 2x-1$ est toujours croissante, et s'annule en $\dfrac{1}{2}$. De là, il est aisé d'obtenir le tableau de variations de f, ainsi que sa courbe :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f		$\searrow$	-4	$\nearrow$	

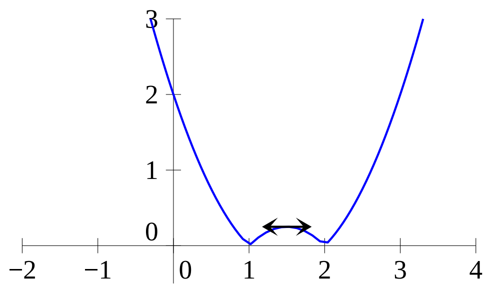


2. Soit $p \in \mathbb{N}$, les réels antécédents de p par f sont les solutions de l'encadrement $p \leqslant \dfrac{x}{3} - 2 < p+1$, ce qui revient à $3p + 6 \leqslant x < 3p + 9$. La fonction f prend donc la valeur p sur les intervalles de la forme $[3p + 6; 3p + 9[$: elle est nulle sur $[6; 9[$, vaut 1 sur $[9; 12[$ etc. Voici sa courbe représentative :



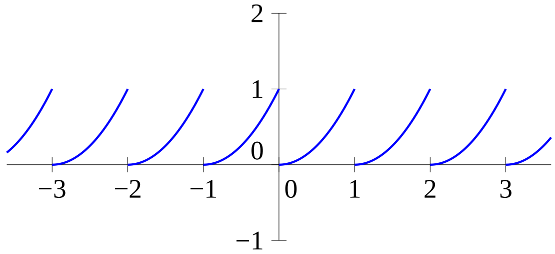
3. On commence par étudier variations et signe de ce qui se trouve à l'intérieur de la valeur absolue. Le trinome a pour discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1$, et admet deux racines réelles $x_1 = \dfrac{3+1}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{3-1}{2} = 1$. De plus, $x^2 - 3x + 2$ a pour dérivée $2x - 3$, et admet donc un minimum en $x = \dfrac{3}{2}$, de valeur $\dfrac{9}{4} - \dfrac{9}{2} + 2 = -\dfrac{1}{4}$. On en déduit le tableau et la courbe :

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	



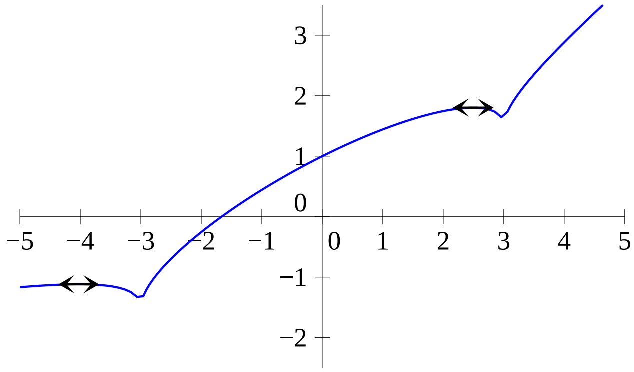
4. Si on connait bien son cours, on doit se rappeler y avoir vu que la fonction partie fractionnaire était périodique de période 1. Or la fonction f n'est autre que le carré de la partie fractionnaire,

elle est donc également périodique de période 1, et on peut donc se contenter de l'étudier sur l'intervalle $[0;1[$. Sur cet intervalle, on a $Ent(x) = 0$, donc f n'est autre que la fonction carré. Finalement, la courbe de f est donc une répétition de morceaux de parabole :



5. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, mais il vaut mieux essayer de l'exprimer de différentes façons selon la valeur de x. Si $x \geqslant 3$, on a $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\sqrt{x^2-9}$, et la fonction est croissante sur $[3;+\infty[$ en tant que somme de deux fonction croissantes. Sur les deux autres intervalles à étudier, les calculs vont être un tout petit peu plus pénibles... Començons par exemple par $[-3;3]$, intervalle sur lequel $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\sqrt{9-x^2}$. On a sur cet intervalle $f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}} = \frac{3\sqrt{9-x^2}-2x}{6\sqrt{9-x^2}}$. Cette dérivée est positive sur $[-3;0]$, mais s'annule lorsque $x > 0$ et $3\sqrt{9-x^2} = 2x$, soit (en passant tout au carré) $9(9-x^2) = 4x^2$, ou encore $81 = 13x^2$. La fonction f est donc croissante sur $\left[-3;\sqrt{\frac{81}{13}}\right]$, et décroissante sur $\left[\sqrt{\frac{81}{13}};3\right]$ (pour information, la valeur un peu bizarre vaut environ $2,5$). Ne reste plus qu'à s'occuper de l'intervalle $]-\infty;-3]$, où la fonction est égale à $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\sqrt{x^2-9}$. Un calcul extrêmement similaire au précédent montre que la dérivée s'annule lorsque $3\sqrt{x^2-9} = -2x$, soit $9(x^2-9) = 4x^2$. On obtient donc un autre minimum local pour $x = -\sqrt{\frac{81}{5}}$ (un peu avant -4). On peut même, avec un peu de motivation, calculer les valeurs de nos maxima locaux : $f\left(-\frac{9}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{9}{2\sqrt{5}} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{81}{5}} = -\frac{9}{2\sqrt{5}} + \frac{6}{3\sqrt{5}} = -\frac{5}{2\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{2} \simeq -1,12$. De même, on obtient $f\left(\frac{9}{\sqrt{13}}\right) = \frac{\sqrt{13}}{2} \simeq 1,8$ Voici donc le magnifique tableau de variations et la non moins superbe courbe représentative de la fonction f :

x	$-\infty$		$-\frac{9}{\sqrt{5}}$		-3		$\frac{9}{\sqrt{13}}$		3		$+\infty$
f		↗	$-\frac{\sqrt{5}}{2}$	↘	$-\frac{3}{2}$	↗	$\frac{\sqrt{13}}{2}$	↘	$\frac{3}{2}$	↗	



6. Ici, le plus simple est de découper $\mathcal{R}_+^*$ et $\mathcal{R}_-^*$ (la fonction n'est pas définie en 0) selon les valeurs de $Ent\left(\frac{1}{x}\right)$. Si $x > 1$, $0 < \frac{1}{x} < 1$, donc $f(x) = 0$. Si $\frac{1}{2} < x \leqslant 1$, $1 \leqslant \frac{1}{x} < 1$, donc $f(x) = x$. De même, si $x \in \left]\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$, $f(x) = 2x$ etc. Visuellement, on a quand on se rapproche de 0 des segments de droite de pente de plus en plus forte mais sur une longueur de plus en plus réduite. Du côté négatif, c'est un peu similaire, mais f n'est jamais nulle : $f(x) = -x$ sur $]-\infty; -1[$, puis $f(x) = -2x$ sur $\left[-1; -\frac{1}{2}\right[$ etc. Difficile de tracer entièrement la courbe, mais ça ressemble à ceci :