Feuilles d'exercices n°2 : Fonctions usuelles

ECE3 Lycée Carnot

10 septembre 2010

Exercice 1 (*)

Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$

2. $f(x) = e^x \ln(2x + 3)$

3. $f(x) = \frac{\sqrt{x(x+1)}}{x^2 - 1}$

4. $f(x) = \ln(x^5 + 1)$

Exercice 2 (* à **)

Déterminer la parité des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x + 1$

2. $f(x) = \ln|x|$

3. $f(x) = \frac{1}{(x^3 - 2x)^2} \times \frac{x^4}{\sqrt{x^2 + 2}}$

4. $f(x) = |2x^2 - e^{x^4} + \ln(x^2 - 1)|$

5. $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

Exercice 3 (* à **)

Calculez la dérivée de chacune des fonctions suivantes, ainsi que l'équation de la tangente en 1 à leurs courbes représentatives (si elle existe) :

1. $f(x) = 1 + \ln(1+x)$

2. $f(x) = \frac{1+x}{1+e^x} - x$

3. $f(x) = \ln\left(2x - \frac{3}{x}\right)$

4. $f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2 - 1}$

5. $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$

Exercice 4 (** à ***)

Résoudre les équations, inéquations et systèmes suivants :

1. $2 \ln(x+1) + \ln(3x+5) + \ln 2 = \ln(6x+1) + 2 \ln(x-2)$
2. $5^x - 5^{x+1} + 2^{3x-1} = 0$
3. $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$
4. $x^{\frac{1}{4}} + 2x^{\frac{5}{3}} - 3 = 0$
5. $e^{-6x} + 3e^{-4x} - e^{-2x} - 3 = 0$
6. $8^{6x} - 3 \times 8^{3x} \leq 4$
7.
$$\begin{cases} x + y = 520 \\ \log x + \log y = 4 \end{cases}$$

Exercice 5 (**)

Déterminer sans calculer leur dérivée les variations des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{-5}{2e^{-2x+3}}$
2. $f(x) = (e^x + 2)^2 - 3$
3. $f(x) = (e^x - 3)^2 + 2$
4. $f(x) = \ln(e^{-x} - 1)$
5. $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

Exercice 6 (* à ***)

Étudier les variations et tracer la représentation graphique des fonctions suivantes :

1. $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$
2. $f(x) = x^x$
3. $f(x) = \ln(1+x+x^2)$
4. $f(x) = e^{x^2-x-1}$
5. $f(x) = \ln\left(\frac{x^2-4x}{x^2-4x+3}\right)$
6. $f(x) = x^{x^2}$

Exercice 7 (**)

Montrer que $\forall x > 0, \ln x \leq x - 1$.

Montrer que $\forall x \geq 0, (1+x)^{\frac{1}{4}} \geq 1 + \frac{x}{4} - \frac{3x^2}{32}$.

Exercice 8 (* à **)

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $|x-3| \geq 5$
2. $|2x-4| = |3x+2|$
3. $|x^2-8x+11| = 4$

4. $|x + 3| + |3x - 1| < -2$
5. $|x - 2| \geq |4x + 2|$
6. $|2x - 3| + |3 - x| - |x - 7| = 2$
7. $|e^x - 3| < 1$
8. $\sqrt{|x^2 - 1|} = x - 5$

Exercice 9 (**)

Écrire sans valeur absolue (en distinguant selon la valeur de x) les expressions suivantes :

1. $|x - 2| + |x + 5|$
2. $|3x^2 - 5x + 2|$
3. $\ln(|x^2 - 4|)$
4. $|2 - 3x| - \sqrt{2x^2 - 8x + 8}$
5. $\frac{e^{|x+1|}}{|e^{x+1}|}$

Exercice 10 (un bon ***)

Quelques propriétés faisant intervenir les parties entières :

1. Montrer que, si $n \in \mathbb{N}$, $Ent(x + n) = Ent(x) + n$
2. Montrer que, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $Ent(x) + Ent(y) \leq Ent(x + y)$. L'inégalité peut-elle être stricte ?
3. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $Ent\left(\frac{x}{2}\right) + Ent\left(\frac{x+1}{2}\right) = Ent(x)$.
4. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $Ent\left(\frac{Ent(nx)}{n}\right) = Ent(x)$

Exercice 11 (** à ***)

Représenter graphiquement les fonctions suivantes :

1. $f(x) = |2x - 1| - 4$
2. $f(x) = Ent\left(\frac{x}{3} - 2\right)$
3. $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$
4. $f(x) = (x - Ent(x))^2$
5. $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}\sqrt{|x^2 - 9|}$
6. $f(x) = x Ent\left(\frac{1}{x}\right)$