Feuille d'exercices n°5 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

16 octobre 2010

Exercice 1 (*)

On a $\overline{A} = \mathbb{N}\backslash\{1;3;5;7\}$ (non, pas la peine d'insister, on ne peut pas l'écrire plus simplement) ; $B\backslash A = \{2;4;6\}$; $A \cup B \cup C = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$; $\overline{C} \cap \overline{B} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 11\}$ et $A \cup (B \cap C) = \{1;3;5;6;7;9\}$.

Exercice 2 (* à **)

On a $A \cup B = [4;12] \cup [-5;5] = [-5;12]$; $A \cap C = \{4;5;6;7;8;9;10;11;12\}$;
$\mathbb{R}\backslash B = \mathbb{R}\backslash[-5;5] =]-\infty;-5[\cup]5;+\infty[$; $A \cap \overline{C} = [4;5[\cup]5;6[\cup]6;7[\cup]7;8[\cup]8;9[\cup]9;10[\cup]10;11[\cup]11;12]$;
$(A \cup B) \cap C = \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12\}$;
$A \cup (B \cap C) = [4;12] \cup \{0;1;2;3\}$ et $\overline{A} \cap (\overline{B} \cup C) =]-\infty;-5] \cup \{0;1;2;3\} \cup [12;+\infty[$.

Exercice 3 (*)

On a $C \subset R \subset A \subset Q$, mais aussi $C \subset L \subset P \subset T \subset Q$, et enfin $R \subset P$. Par contre, pas d'inclusion entre P ou T et A, ni entre L et R.

On a $A \cap L = C$, $A \cap P = R$ et $L \cap R = C$.

Exercice 4 (***)

Considérons un élément x appartenant à $(A \cup B \cup C)\backslash(A \cap B \cap C)$. Cela signifie que x appartient à au moins un des trois ensembles A, B et C (puisqu'il appartient à leur union), mais pas aux trois à la fois (puisqu'il n'appartient pas à l'intersection). Autrement dit, x appartient à exactement un ou deux ensembles parmi les trois. S'il appartient à un seul, par exemple A (les trois ensembles jouent un rôle symétrique), alors il appartient à $A\backslash B$, donc à l'ensemble de gauche. S'il appartient à deux des ensembles, par exemple A et B, alors il appartient à $B\backslash C$, et encore une fois à l'ensemble de gauche. Dans tous les cas, $x \in (A\backslash B) \cup (B\backslash C) \cup (C\backslash A)$.

Dans l'autre sens, si x appartient à l'union de gauche, il appartient à (au moins) l'un des trois ensembles $A\backslash B$, $B\backslash C$ et $C\backslash A$, donc à l'un des trois ensembles A, B et C. Ceci prouve que $x \in A \cup B \cup C$. mais le fait que x soit dans l'ensemble de gauche signifie aussi qu'il y a un des trois ensembles A, B et C auquel x n'appartient pas, donc $x \notin A \cap B \cap C$, ce qui prouve qu'il appartient à l'ensemble de droite. Les deux ensembles sont donc bien égaux.

Exercice 5 (***)

On constate d'abord que $(A \star A) = \overline{A \cap A} = \overline{A}$, puis en utilisant ce résultat $(A \star A) \star (B \star B) = \overline{A} \star \overline{B} = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}} = \overline{\overline{A}} \cup \overline{\overline{B}} = A \cup B$ (n utilisant les lois de Morgan pour l'avant-dernière inégalité. De même, $(A \star B) \star (A \star B) = (\overline{A \cap B}) \cap (\overline{A \cap B}) = \overline{(\overline{A \cap B}) \cap (\overline{A \cap B})} = \overline{\overline{A \cap B}} = A \cap B$. La conclusion de l'exercice c'est qu'on peut exprimer à l'aide d'une seule opération certes un peu étrange (l'opération $\star$) toutes les opérations usuelles (complémentaire, union et intersection).

Exercice 6 (**)

- L'application f_1 est injective puisque $n+5=n'+5 \Rightarrow n=n'$, mais pas surjective car 0 par exemple n'a pas d'antécédent par f_1.
- L'application f_2 est injective : en effet, $n^2=n'^2 \Rightarrow n=n'$ quand n et n' sont positifs. Par contre, elle n'est pas surjective, 2 par exemple n'ayant pas d'antécédent par f_2.
- L'application f_3 est un peu plus pénible à étudier que les autres mais elle est en fait bijective. Les entiers pairs sont envoyés sur les entiers impairs et veci-versa donc un entier pair ne peut pas avoir la même image qu'un entier impair. Comme la restriction de f aux entiers pairs, et celle aux entiers impairs, sont manifestement injectives, f_3 est injective. Elle est également surjective car si p est pair, $p+1$ est un antécédent de p, et si p est impair, c'est $p-1$ qui marche.
- L'application f_4 n'est pas surjective car 1 et 2 ont par exemple la même image. Par contre, elle est surjective, $3p$ étant toujours un antécédent de p (il n'est pas très compliqué de constater que chaque entier a en fait trois antécédents par f_4).
- Cette dernière application n'est pas injective, 3 et 17 ayant par exemple la même image. Par contre, elle est surjective car $p+10$ est toujours un antécédent de p.

Exercice 7 (* à **)

Si f est la fonction inverse, $f([2;4])=\left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$; $f(]0;2])=\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ et $f([-1;5])=]-\infty;-1]\cup\left[\frac{1}{5};+\infty\right[$. Les images réciproques sont exactement les mêmes que les images directes (c'est du au fait que la fonction inverse est sa propre réciproque).

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2;2\}$, et a pour dérivée $f'(x)=\dfrac{4x(x^2-4)-2x(2x^2+1)}{(x^2-4)^2}=\dfrac{-18x}{(x^2-4)^2}$. On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f(x)$	2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$-\frac{1}{4}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2

Je vous épargne le détail du calcul des limites, qui ne sont pas franchement insurmontables. À partir du tableau, et à l'aide de quelques calculs d'images, on peut en tout cas lire $g([-1;1])=\left[-1;-\frac{1}{4}\right]$ (après avoir constaté que $g(-1)=g(1)=-1$) ; $g([-6;-3[)=\left[\frac{73}{32};\frac{19}{5}\right[$; $g^{-1}(]-\infty;1])=]-2;2[$ et $g^{-1}([0;1])=\emptyset$.

Exercice 8 (***)

1. Les antécédents de y sont les réels x vérifiant $\dfrac{2x}{1+x^2}=y$, soit $2x=y+yx^2$ ou encore $yx^2-2x-y=0$. Si $y=0$, on obtient comme seul antécédent $x=0$. Sinon, on a une équation du second degré, dont le discriminant vaut $4-4y^2=4(1-y^2)$. Si $y<-1$ ou $y>1$, le discriminant est négatif, et y n'a pas d'antécédent. Si $y=-1$, il y a une seule solution (donc un antécédent) qui est $x=-1$, et si $y=1$, on a aussi un seul antécédent qui est $x=1$. Enfin, si $-1<y<1$ (avec $y\neq 0$), on a deux antécédents qui valent $\dfrac{2\pm\sqrt{4(1-y^2}}{2y}=\dfrac{1\pm\sqrt{1-y^2}}{y}$.

2. L'application f n'est ni injective ni surjective (et donc pas bijective) puisque certains réels n'ont pas d'antécédent et que d'autres en ont plusieurs.
3. On a en fait $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in [-1;1]$. En effet, $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x+1)^2 \geq 0$, donc $x^2+2x+1 \geq 0$, ou encore $-2x \leq x^2+1$. Il suffit de diviser par x^2+1, qui est toujours positif, pour obtenir $f(x) \geq -1$. De même, $(x-1)^2 = x^2-2x+1 \geq 0$, donc $2x \leq x^2+1$, ce qui donne $f(x) \leq 1$. De plus, sur $[-1;1]$, la fonction f est strictement croissante (sa dérivée vaut $\dfrac{2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$, qui est toujours positive sur $[-1;1]$). Elle est donc injective, et prend toutes les valeurs entre -1 et 1, puisque $f(-1) = -1$ et $f(1) = 1$. On en conclut que f réalise une bijection de $[-1;1]$ sur lui-même.

Exercice 9 (**)

Pas vraiment d'autre moyen que d'étudier les variations de f : $f'(x) = \dfrac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2} = \dfrac{e^{2x}+e^{-2x}+2e^x-e^{2x}-e^{-2x}+2e^x}{(e^x+e^{-x})^2} = \dfrac{4e^x}{(e^x+e^{-x})^2}$. Une exponentielle étant toujours positive, cette dérivée est toujours positive, et la fonction f strictement croissante. Elle est donc injective. Pour savoir si elle est surjective, il suffit de calculer ses limites à l'infini. Comme $f(x) = \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \dfrac{e^x(1-e^{-2x})}{e^x(1+e^{-2x})} = \dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$. Les deux termes tendent vers 1 en $+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$. De même, en factorisant par e^{-x}, on obtient $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$. La fonction f n'est donc pas surjective sur $\mathbb{R}$. Par contre, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1;1[$.

Exercice 10 (**)

Ca se fait en une ligne si on pense à appliquer le bon résultat du cours : $f\circ(f\circ f) = (f\circ f)\circ f = id_E$, donc les applications f et $f\circ f$ sont réciproques l'une de l'autre. Autrement dit, f est bijective, de réciproque $f^{-1} = f\circ f$.

Exercice 11 (** à *****)

1. Une application fort simple suffit à notre bonheur, celle qui à un entier naturel n associe son double $2n$. Il est assez évident que f est à valeurs dans l'ensemble des entiers pairs, qu'elle est injective et surjective vers cet ensemble, donc bijective.
2. Si vous avez bien compris le cas précédent, celui-ci parait relativement naturel, mais l'application est un peu plus difficile à construire. L'idée est, par exemple, d'envoyer les naturels pairs sur les entiers positifs, et les impairs sur les négatifs. Une façon de le faire est de poser $f(n) = \dfrac{n}{2}$ si n est pair, et $f(n) = -\dfrac{n+1}{2}$ si n est impair. Si n est pair, $f(n) \geq 0$, et si n est impair, $f(n) < 0$. Comme par ailleurs, $\dfrac{n}{2} = \dfrac{n'}{2} \Rightarrow n = n'$, et $-\dfrac{n+1}{2} = -\dfrac{n'+1}{2} \Rightarrow n = n'$, l'application f est injective. Ne reste plus qu'à prouver qu'elle est surjective : soit $p \in \mathbb{Z}$, si $p \geq 0$, $2p$ est un antécédent de p ; si $p < 0$, $-2p-1$ est un antécédent de p. Finalement, f est bien bijective.
3. Ça se complique de plus en plus, alors plutôt que de vous donner une formule affreuse pour la bijection, je vais expliquer comment ça marche et j'espère que vous serez convaincus. L'ensemble $\mathbb{N}^2$ peut être représenté sous forme d'un tableau à deux dimensions, et donner une bijection de $\mathbb{N}$ vers ce tableau revient en fait à numéroter les éléments de ce tableau (à partir de 0) en essayant de ne pas en oublier au passage. L'idée est de faire cette numérotation diagonale par

diagonale : on pose $f(0) = (0;0)$, puis $f(1) = (0;1)$ et $f(2) = (1;0)$ (première diagonale), puis $f(3) = (0;2)$, $f(4) = (1;1)$ et $f(5) = (2;0)$ etc. Le couple $(p;q)$ se trouve sur la diagonale numéro $p+q$, il est même le $(p+1)$ème élément de la diagonale avec la numérotation choisie, et on a déjà numéroté $1+2+\cdots+(p+q)$ éléments sur les diagonales précédentes, soit $\frac{(p+q)(p+q+1)}{2}$ éléments. Autrement dit, on a $f(n) = (p;q)$ pour $n = \frac{(p+q)(p+q+1)}{2} + p$ (on commence à numéroter à 0, ce qui explique qu'on ajoute p et pas $p+1$ à la fin). On a donc décrit la réciproque de la bijection f (je laisse les plus courageux vérifier que c'est bien une bijection).

4. En fait, l'idée est la même que pour $\mathbb{N}^2$ puisque $\mathbb{Q}$ est « plus petit » que $\mathbb{N}^2$: on peut toujours représenter un rationnel par un couple d'entiers (le numérateur et le dénominateur de la fraction) sauf qu'on impose en plus que la fraction en question ne soit pas simplifiable. Il suffit donc de reprendre le principe de la numérotation précédente, mais en sautant tous les couples correspondant à des fractions déjà numérotées (ainsi, on attribuera un numéro au couple $(1;1)$ mais pas au couple $(2;2)$, ni à $(3;3)$ etc.). Trouver une formule explicite pour cette bijection est impossible, et justifier correctement que ça fonctionne bien est délicat. On se contentera donc de constater que trouver une application injective de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z}^2$ est facile (on associe à tout élément de $\mathbb{Q}$, mis sous forme irréductible, le numérateur et le dénominateur de la fraction), et qu'en composant cette application avec les bijections déjà construites de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{N}^2$ et de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$, on aura une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}$, ce qui est suffisant d'après un théorème compliqué.
5. Pour le fait que $\mathbb{N}$ n'est pas équipotent à $\mathbb{R}$, il faut passer par un raisonnement par l'absurde. Supposons donc qu'il existe une bijection f qui « numérote » tous les réels. Un réel peut s'écrire sous forme décimale, avec éventuellement une infinité de chiffres après la virgule (cette écriture pose en fait quelques problèmes théoriques que nous allons passer sous silence). Notons donc x_1 l'image de 0 par f, qui sera donc pour nous un nombre décimal, x_2 l'image de 1, x_3 l'image de 2 etc. Construisons désormais un nouveau nombre décimal x de la façon suivante : $x = 0,\dots$, en choisissant comme première décimale un chiffre différent de la première décimale de x_1 (on peut certainement, puisqu'il y a 10 chiffres possibles pour chaque décimale !), comme deuxième décimale un chiffre différent de la deuxième décimale de x_2, comme troisième décimale un chiffre différent de la troisième décimale de x_3 etc. Un tel nombre x est certainement différent de x_1 (ils ont au moins une décimale différente), de x_2, x_3, et de tous les x_i. Conclusion, ce nombre x n'a pas d'antécédent par f, qui ne peut donc pas être surjective, et encore moins bijective, ce qui est absurde ! Cet argument est connu sous le nom de « diagonale de Cantor ».
6. On a vu à l'exercice 9 une bijection f de $\mathbb{R}$ dans $]-1;1[$. Il suffit de poser $g(x) = \frac{1+f(x)}{2}$ pour obtenir une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0;1[$ (je vous laisse comprendre pourquoi).
7. Dessinez un demi-cercle sur une feuille, une droite un peu en-dessous, et placez le centre O du demi-cercle. On considère ensuite l'application suivante : à un point P du demi-cercle, on associe le point de la droite qui est sur la droite (OP). Il n'est pas très dur de se convaincre que cette application est bijective (en excluant les deux points extrêmes du demi-cercle). Ensuite, il reste à construire une bijection d'un demi-cercle vers un cercle entier, ce qui n'est pas très difficile en multipliant par exemple l'angle entre l'horizontale et chaque point du demi-cercle par deux.

Exercice 12 (****)

Bon, si le prof a mis quatre étoiles, c'est que l'exo doit être super dur, non ? En fait, la grosse difficulté, c'est qu'il faut passer par une récurrence forte pour s'en sortir. Notons donc P_n : $\forall k \leq n$, $f(k) = k$ (autrement dit, la restriction de f aux n premiers entiers est l'identité). Pour $n = 0$, la propriété nous dit simplement que $f(0) = 0$, ce qui est vrai puisque par hypothèse $f(0) \leq 0$, et $f(0) \in \mathbb{N}$. Supposons donc P_n vérifiée, et cherchons à prouver P_{n+1}. On sait déjà par hypothèse de récurrence que $f(k) = k$ pour tous les entiers k jusqu'à n inclus. Il ne reste donc en fait qu'à prouver que $f(n+1) = n+1$. L'énoncé nous indique que $f(n+1) \leq n+1$, et par ailleurs, f étant injective, $f(n+1)$ doit être différent de toutes les valeurs prises par f sur les entiers compris entre 0 et n. Or, ces valeurs sont par hypothèse de récurrence tous les entiers compris entre 0 et n. Il ne reste donc plus qu'une possibilité pour $f(n+1)$: être égal à $n+1$. Ceci prouve la propriété P_{n+1} et achève la récurrence. La propriété P_n est donc vérifiée quel que soit l'entier n, ce qui prouve entre autre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n$, c'est-à-dire que $f = id_{\mathbb{N}}$.