

Feuille d'exercices n°5 : Ensembles et applications

ECE3 Lycée Carnot

9 octobre 2009

Exercice 1 (*)

Dans l'ensemble des entiers naturels, on considère les trois sous-ensembles $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$; $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $C = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Déterminer les ensembles suivants : $\overline{A}$; $B \setminus A$; $A \cup B \cup C$; $\overline{C} \cap \overline{B}$; $A \cup (B \cap C)$.

Exercice 2 (* à **)

On se place dans $\mathbb{R}$ et on considère les ensembles $A = [4; 12]$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 5\}$, et $C = \mathbb{N}$. Donner l'expression la plus simple possible pour chacun des ensembles suivants : $A \cup B$; $A \cap C$; $\mathbb{R} \setminus B$; $A \cap \overline{C}$; $(A \cup B) \cap C$; $A \cup (B \cap C)$; $\overline{A} \cap (\overline{B} \cup C)$.

Exercice 3 (* si vous n'avez pas tout oublié sur les quadrilatères)

Cet exercice vous rappellera de (bons ?) souvenirs de géométrie du collège. On note Q l'ensemble du quadrilatère du plan, A l'ensemble des quadrilatères ayant un angle droit, P l'ensemble des parallélogrammes, T l'ensemble des trapèzes, C l'ensemble des carrés, R l'ensemble des rectangles, et L l'ensemble des losanges.

Parmi tous ces ensembles, déterminer qui est inclus dans qui, puis déterminer ce que valent les ensembles $A \cap L$, $A \cap P$ et $L \cap R$.

Exercice 4 (***)

Montrer que, si A , B et C sont trois sous-ensembles d'un même ensemble E , $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) = (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C)$.

Exercice 5 (***)

Soient A et B deux sous-ensembles d'un même ensemble E . On définit une nouvelle opération $\star$ de la façon suivante : $A \star B = \overline{A \cap B}$. Exprimer le plus simplement possible les ensembles suivants : $A \star A$; $(A \star A) \star (B \star B)$; $(A \star B) \star (A \star B)$.

Exercice 6 (**)

Déterminer pour chacune des applications suivantes si elle est injective, surjective ou bijective (ou rien du tout !) de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$:

- $f_1(n) = n + 5$
- $f_2(n) = n^2$
- $f_3(n) = n + 1$ si n est pair, et $f_3(n) = n - 1$ si n est impair
- $f_4(n) = \text{Ent} \left(\frac{n}{3} \right)$
- $f_5(n) = |n - 10|$

Exercice 7 (* pour la première moitié, ** pour la deuxième)

Soit f la fonction inverse. Déterminer $f([2; 4])$; $f(]0; 2])$; $f([-1; 5])$, ainsi que les images réciproques de ces trois intervalles par f .

Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 4}$. Déterminer son ensemble de définition et étudier rapidement g (vous avez le droit de dériver...). Déterminer $g([-1; 1])$; $g([-6; -3])$; $g^{-1}(]-\infty; 1])$; $g^{-1}([0; 1])$.

Exercice 8 (***)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$.

1. Soit $y \in \mathbb{R}$. Déterminer en fonction de y le nombre d'antécédents de y et leur valeur quand il y en a.
2. L'application f est-elle injective? Surjective? Bijective?
3. Montrer que $\forall x \in [-1; 1]$, $f(x) \in [-1; 1]$. La restriction de $f : [-1; 1] \rightarrow [-1; 1]$ est-elle bijective?

Exercice 9 (**)

On définit sur $\mathbb{R}$ une application f par $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Déterminer si f est injective, surjective, bijective.

Exercice 10 (**)

Soit $f : E \rightarrow E$ une application telle que $f \circ f \circ f = id_E$. Montrer que f est bijective et déterminer sa réciproque.

Exercice 11 (** à *****)

Un ensemble est **dénombrable** s'il existe une application $f : \mathbb{N} \rightarrow E$ bijective. Pour certaines questions, on pourra se contenter de trouver une application injective de E dans $\mathbb{N}$ (on admet que ce sera suffisant).

1. Montrer que l'ensemble des entiers pairs est dénombrable.
2. Montrer que $\mathbb{Z}$ est dénombrable.
3. Montrer que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.
4. Montrer que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.
5. Montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable (c'est ça qui vaut une difficulté de ****).
6. Montrer qu'il existe une bijection de $]0; 1[$ dans $\mathbb{R}$.
7. Montrer qu'il y a « autant de points » dans une droite que dans un cercle.

Exercice 12 (****)

Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une application injective telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) \leq n$. Montrer qu'on a en fait $f = id_{\mathbb{N}}$.