Feuille d'exercices n°17 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

22 mars 2011

Exercice 1 (*)

- La fonction f_1 est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$, de dérivée $f_1'(x) = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x$. De plus, on peut prolonger f_1 par continuité en 0 en posant $f_1(0) = 0$, puisque $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x) = 0$. Comme f_1 est continue sur $\mathbb{R}_+$, C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, et que $\lim\limits_{x\to 0} f_1'(x) = -\infty$, le théorème du prolongement C^1 permet d'affirmer que la courbe admet une tangente verticale en 0.
- La fonction f_2 est définie sur $]-\infty;-1]$ et a priori dérivable sur $]-\infty;-1[$, et $f_2'(x) = \sqrt{1-x} - \dfrac{x}{2\sqrt{1-x}} = \dfrac{2(1-x)-x}{2\sqrt{1-x}} = \dfrac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$. Comme f_2 est C^1 sur $]-\infty;-1[$ et $\lim\limits_{x\to 1} f_2'(x) = -\infty$, d'après le théorème de prolongement C^1, il y aura une tangente verticale en 1.
- Comme $f_3(x) = e^{x\ln x}$, la fonction f_3 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et $f_3'(x) = (\ln x + 1)e^{x\ln x}$. La fonction est par ailleurs prolongeable par continuité en posant $f_3(0) = 1$ (puisque $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$). Elle est C^1 sur $]0;+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to 0} f_3'(x) = -\infty$, donc il y aura une tangente verticale en 0 (théorème de prolongement C^1).
- La fonction f_4 est définie sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable a priori sur $\mathbb{R}_+^*$, et $f_4'(x) = \left(6x + \dfrac{1}{\sqrt{2x}}\right)e^{3x^2+\sqrt{2x}}$. Cette dérivée étant continue sur $]0;+\infty[$ et ayant pour limite $+\infty$ en 0, il y aura (encore une fois, et toujours d'après le théorème de prolongement C^1) une tangente verticale en 0.
- La fonction f_5 est dérivable partout où elle est définie (ici, le domaine de définition est difficile à déterminer) et $f_5'(x) = \dfrac{(4x^3-6x+5)(2x^3+x^2-4x+7)-(6x^2+2x-4)(x^4-3x^2+5x-1)}{(2x^3+x^2-4x+7)^2} = \dfrac{2x^6+2x^5-6x^4+8x^3+7x^2-40x+31}{(2x^3+x^2-4x+7)^2}$ (intéressant, non ?).
- La fonction f_6 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et $f_6'(x) = \dfrac{\frac{3}{2}\sqrt{x}(e^x-1) - x\sqrt{x}e^x}{(e^x-1)^2}$. Comme $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$ (limite classique), on peut affirmer que $f(x) \underset{0}{\sim} \sqrt{x}$, donc f_6 est prolongeable par continuité en posant $f(0) = 0$. De même, on a $f'(x) = \dfrac{3\sqrt{x}}{2(e^x-1)} - \dfrac{x\sqrt{x}e^x}{(e^x-1)^2} = \dfrac{3}{2\sqrt{x}} - \dfrac{e^x}{\sqrt{x}} + o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) \sim \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ (quand on se rapproche de 0, e^x est équivalent à 1). Tout cela tend vers $+\infty$ en 0, il y aura donc une tangente verticale (encore et toujours le théorème du prolongement C^1). Les plus curieux d'entre vous noteront que le fait que $f(x)$ soit équivalent à $\sqrt{x}$ devrait suffire à deviner qu'il y aura une tangente verticale en 0 (puisque c'est le cas pour la racine carrée).
- La fonction f_7 est définie et a priori dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et $f_7'(x) = \dfrac{(2x+\ln x+1)(x+1)-x^2-x\ln x}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2+3x+\ln x+1}{(x+1)^2}$. La fonction f_7 est une fois de plus prolongeable par continuité en 0 en po-

sant $f(0) = 0$ (puisque le numérateur tend vers 0 et le dénominateur vers 1). Quant à la dérivée, elle a pour limite $-\infty$ en 0 (même pas de forme indéterminée), on va donc pouvoir conclure à la tangente verticale en 0 grâce au théorème de prolongement C^1.

- On a $f_8(x) = e^{(4x^2-1)\ln 3}$. La fonction f_8 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f_8'(x) = (8x\ln 3)3^{4x^2-1}$. Enfin une fonction où il n'y a rien à prolonger !
- La fonction f_9 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_*$ et $f_9'(x) = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) e^{x+\frac{1}{x}}$. On a ici une petite curiosité : $\lim\limits_{x\to 0^-} f_9(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f_9(x) = +\infty$, donc f_9 est prolongeable par « continuité à gauche » en 0. Comme f_9' est continue sur $]-\infty;0[$ et que $\lim\limits_{x\to 0^-} f_9'(x) = 0$ (par croissance comparée, $e^{x+\frac{1}{x}}$ étant équivalent à $e^{\frac{1}{x}}$), le théorème de prolongement C^1 permet d'affirmer que la courbe admet une demi-tangente horizontale à gauche en 0.
- La fonction f_{10} est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et $f_{10}'(x) = 2x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + x^2 \times \frac{-2}{x^3}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 2x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2x}{(x^2+1)}$. De plus, $f(x) \underset{0}{\sim} x^2\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$, qui a pour limite 0 en 0 par croissance comparée. De même, le premier morceau dans la dérivée tend vers 0 (et le deuxième aussi, naturellement) et f_{10}' est continue sur $\mathbb{R}^*$, donc le théorème de prolongement C^1 nous permet d'affirmer que f_{10} est prolongeable en une fonction C^1 sur $\mathbb{R}$, de dérivée nulle en 0 (où on aura donc une tangente horizontale).
- La fonction f_{11} est définie sur $\mathbb{R}$ et a priori dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Si $x > 0$, $f_{11}(x) = x^2 - x$, donx $f_{11}'(x) = 2x - 1$; si $x < 0$, $f_{11}(x) = x^2 + x$ et $f_{11}'(x) = x^2 + 1$. La fonction f_{11} est dérivable à gauche et à droite en 0, mais $f_g'(0) = 1$ et $f_d'(0) = -1$, donc elle admet seulement deux demi-tangentes de pentes distinctes en 0.
- Une fois prolongée, f_{12} est définie sur $[0;+\infty[$ et a priori dérivable sur $]0;+\infty[$, de dérivée $f_{12}'(x) = 2x\ln x + x$. Comme $\lim\limits_{x\to 0} f_{12}'(x) = 0$ et que f_{12}' est bien entendu continue sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction f_{12} est en fait dérivable sur $\mathbb{R}$, avec une tangente horizontale en 0.

Exercice 2 (** à ***)

Étude de la fonction f

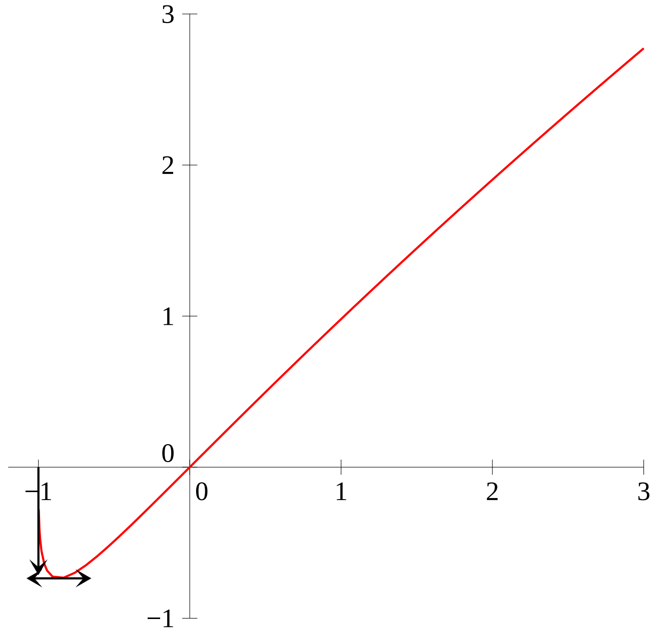
La fonction f est définie si $x+1 > 0$ donc $\mathcal{D}_f =]-1;+\infty[$. Comme $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}\ln x = 0$ (par croissance comparée), $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 0$. La fonction f est donc prolongeable par continuité en -1 en posant $f(-1) = 0$.

On a bien sûr $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, et $\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x+1}\ln(x+1)}{x} = \frac{\sqrt{X}\ln X}{X-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln X}{\sqrt{X}}$ en posant $X = x+1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, et la courbe représentative de f admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Ox).

La fonction f est dérivable sur $]-1;+\infty[$, de dérivée $f'(x) = \frac{\ln(x+1)}{2\sqrt{x+1}} + \frac{\sqrt{x+1}}{x+1} = \frac{\ln(x+1)+2}{2\sqrt{x+1}}$. Cette dérivée s'annule quand $\ln(x+1) = -2$, donc quand $x+1 = \frac{1}{e^2}$, soit $x = \frac{1}{e^2} - 1$. De plus, comme f' est continue sur $]-1;+\infty[$ et que que $\lim\limits_{x\to -1} f'(x) = -\infty$ (pas de forme indéterminée ici, le numérateur tend vers $-\infty$ et le dénominateur vers 0), en appliquant le théorème du prolongement C^1, on obtient une tangente verticale à la courbe en -1. Enfin, $f\left(\frac{1}{e^2} - 1\right) = \sqrt{e^{-2}}\ln e^{-2} = \frac{-2}{e}$, d'où le tableau de variations suivant pour f :

x	-1		$\frac{1}{e^2}-1$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\frac{-2}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

La courbe représentative de f a l'allure suivante :



Étude de la fonction g

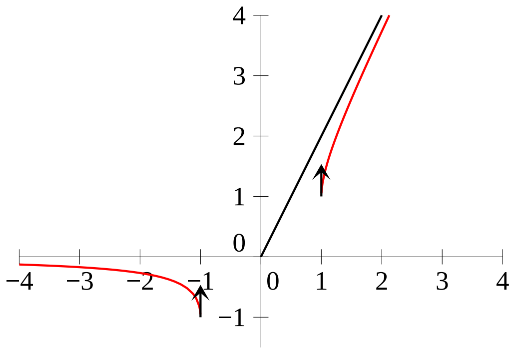
La fonction g est définie si $x^2-1 \geq 0$, donc $\mathcal{D}_g =]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$.

On obtient sans difficulté $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. Ensuite, $\frac{g(x)}{x} = 1 + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = 1 + \frac{\sqrt{x^2(1-\frac{1}{x^2})}}{x}$. Si $x \geq 1$, on a donc $\frac{g(x)}{x} = 1 + \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}$, dont la limite vaut 2 en $+\infty$. Il reste donc à calculer $g(x) - 2x = x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} - 1\right) = \frac{x\left(1-\frac{1}{x^2}-1\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+1} = -\frac{1}{x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+1\right)}$. Ce dernier quotient tend vers 0 en $+\infty$, il y a donc une asymptote oblique d'équation $y = 2x$. C'est plus rapide en $-\infty$: $g(x) = \frac{x^2-(x^2-1)}{x+\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$, quotient qui tend vers 0 en $-\infty$. L'axe des abscisses est donc asymptote à la courbe en $-\infty$.

La fonction g est a priori dérivable sur $]-\infty;-1[$ et sur $]1;+\infty[$, de dérivée $g'(x) = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$. Cette dérivée est manifestement positive sur $]1;+\infty[$. De plus, on a $\forall x < -1$, $x^2 \geq x^2 - 1 \geq 0$, donc $-x \geq \sqrt{x^2-1} \geq 0$, d'où $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \leq -1$. On en déduit que $g'(x) < 0$ sur $]-\infty;-1[$. Enfin, on constate que les limites de g' en -1 et en 1 sont respectivement égales à $-\infty$ et à $+\infty$, d'où l'existence de deux tangentes verticales en ces points via le théorème de prolongement C^1. Finalement, on a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1	1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-\infty$	$+\infty$	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	1	$\nearrow$	$+\infty$

La courbe qui va avec, avec tangente et asymptote (ou plutôt demi-asymptote pour ne pas surcharger le graphique) en noir :



Étude de la fonction h

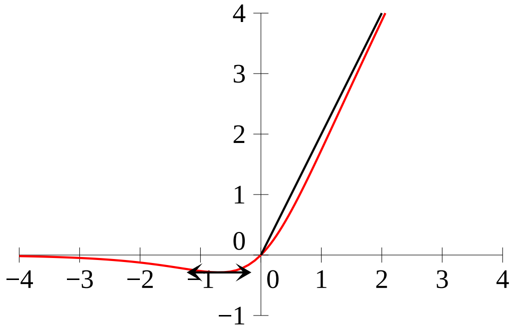
La fonction h est définie si $e^{2x} - e^x + 1 > 0$. Posons donc $P(X) = X^2 - X + 1$. Ce polynôme a pour discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3$, il est donc toujours positif. Conclusion : $\mathcal{D}_h = \mathbb{R}$.

Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} - e^x + 1 = 1$, on a $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 0$, d'où l'existence d'une asymptote horizontale en $-\infty$. De l'autre côté, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} - e^x + 1 = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$. De plus, $\dfrac{h(x)}{x} = \dfrac{\ln(e^{2x}(1 - e^{-x} + e^{-2x}))}{x} = \dfrac{2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})}{x} = 2 + \dfrac{\ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})}{x}$. Le quotient tendant vers 0 (son numérateur tend déjà vers 0), on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{h(x)}{x} = 2$. Enfin, en réutilisant le calcul précédent $h(x) - 2x = \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})$ tend vers 0, donc il y a en $+\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = 2x$.

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $h'(x) = \dfrac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1} = \dfrac{e^x(2e^x - 1)}{e^{2x} - e^x + 1}$. Tout est positif (cf calcul du domaine de définition pour le dénominateur) sauf $2e^x - 1$ qui change de signe quand $e^x = \dfrac{1}{2}$, donc quand $x = -\ln 2$. Comme $h(-\ln 2) = \ln(e^{-2\ln 2} - e^{-\ln 2} + 1) = \ln\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} + 1\right) = \ln\dfrac{3}{4}$, on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\ln(2)$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\ln\frac{3}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Et la courbe, bien entendu :



Étude de la fonction i

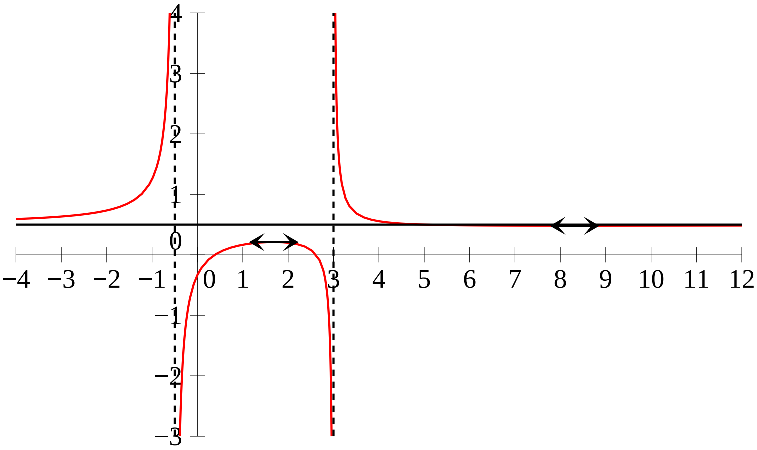
La fonction i est définie quand $2x^2 - 5x - 3 \neq 0$. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 25 + 24 = 49$, et admet pour racines $x_1 = \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{5+7}{4} = 3$, donc $\mathcal{D}_f = \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{2}; 3\right[\cup]3; +\infty[$.

Un léger accès de paresse nous pousse à ne pas déterminer le signe de toutes les limites en $-\frac{1}{2}$ et en 3 : bornons-nous à constater que le dénominateur tend vers 0 et le numérateur respectivement vers $\frac{11}{4}$ et 1, donc il y a des limites infinies en $-\frac{1}{2}^-$, $-\frac{1}{2}^+$, 3^- et 3^+. Nous obtiendrons leur signe à l'aide des variations de i. Pour les branches infinies, pour une fois c'est rapide : $i(x) \underset{\pm\infty}{\sim} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$. Il y a donc une asymptote horizontale en $-\infty$ et en $+\infty$.

Ne reste plus qu'à avoir le courage de calculer la dérivée (définie sur le même ensemble que i) : $i'(x) = \frac{(2x-3)(2x^2-5x-3)-(4x-5)(x^2-3x+1)}{2x^2-5x-3)^2}$
$= \frac{4x^3 - 10x^2 - 6x - 6x^2 + 15x + 9 - 4x^3 + 12x^2 - 4x + 5x^2 - 15x + 5}{(2x^2-5x-3)^2} = \frac{x^2 - 10x + 14}{(2x^2-5x-3)^2}$. Le numérateur a pour discriminant $\Delta = 100 - 56 = 44$, et admet deux racines $x_3 = \frac{10-\sqrt{44}}{2} = 5 - \sqrt{11}$ et $x_4 = 5 + \sqrt{11}$. Il faut bien sûr pour achever le tableau de variations calculer les valeurs de i en x_3 et x_4 : $i(x_3) = \frac{(5-\sqrt{11})^2 - 3(5-\sqrt{11}) + 1}{2(5-\sqrt{11})^2 - 5(5-\sqrt{11}) - 3} = \frac{36 - 10\sqrt{11} - 15 + 3\sqrt{11} + 1}{72 - 20\sqrt{11} - 25 + 5\sqrt{11} - 3} = \frac{22 - 7\sqrt{11}}{44 - 15\sqrt{11}} \simeq 0.21$; et de même $i(x_4) = \frac{(5+\sqrt{11})^2 - 3(5+\sqrt{11}) + 1}{2(5+\sqrt{11})^2 - 5(5+\sqrt{11}) - 3} = \frac{36 + 10\sqrt{11} - 15 - 3\sqrt{11} + 1}{72 + 20\sqrt{11} - 25 - 5\sqrt{11} - 3} = \frac{22 + 7\sqrt{11}}{44 + 15\sqrt{11}} \simeq 0.48$. Cela donc un tableau du genre :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		x_3		3		x_4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	∥	$-$	0	$+$	∥	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	↘	$-\infty$ ∥ $+\infty$	↘	$i(x_3)$	↗	$+\infty$ ∥ $-\infty$	↗	$i(x_4)$	↘	$\frac{1}{2}$

Et la courbe, bien entendu (le minimum local en x_4 est peu visible car très très proche de l'asymptote, ce dont on pouvait se douter d'ailleurs au vu de sa valeur) :



Étude de la fonction k

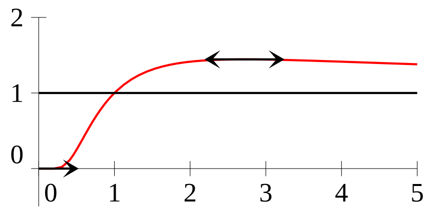
Écrivons plutôt $k(x) = e^{\frac{\ln x}{x}}$. La fonction k est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme de plus $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty$ (non, il n'y a pas de forme indéterminée), on a $\lim\limits_{x\to 0^+} k(x) = 0$ et on peut prolonger k par continuité en posant $k(0) = 0$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ (croissance comparée), $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = 1$, d'où la présence d'une asymptote horizontale en $+\infty$.

La fonction k est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $k'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2} e^{\frac{\ln x}{x}}$. Cette dérivée s'annule lorsque $\ln x = 1$, c'est-à-dire pour $x = e$, valeur où k admet pour maximum $e^{\frac{1}{e}} \sim 1.44$. Ne reste qu'à essayer de calculer la limite de k' en 0, ce qui n'est pas évident : $k'(x) \sim \dfrac{-\ln x}{x^2} e^{\frac{\ln x}{x}} - \dfrac{1}{\ln x}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2 e^{\frac{\ln x}{x}}$. Comme $\dfrac{\ln x}{x}$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers 0, on a par croissance comparée $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2 e^{\frac{\ln x}{x}} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} k'(x) = 0$. En appliquant le théorème de prolongement C^1, k est dérivable en 0, et la courbe y admet une tangente horizontale. Le tableau de variations :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$e^{\frac{1}{e}}$	$\searrow$	1

Et une fois de plus, la courbe :



Étude de la fonction l

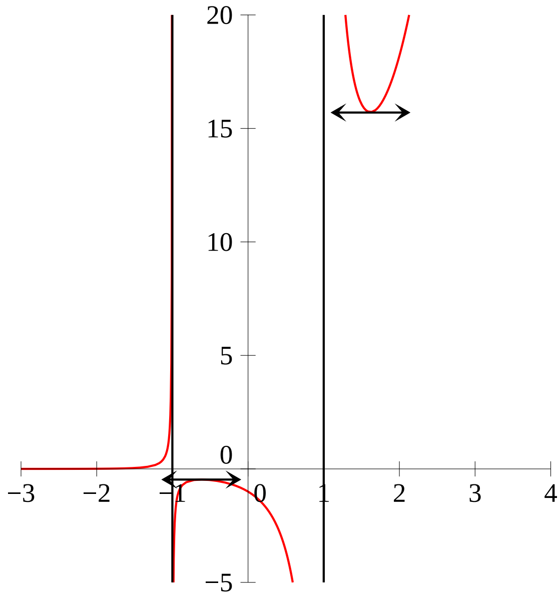
La fonction l est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$.

En $+\infty$, la limite de l comme celle de $\dfrac{l(x)}{x}$ sont égales à $+\infty$ par croissance comparée, il y a donc de ce côté une branche parabolique de direction (Oy). En $-\infty$, toujours par croissance comparée, l tend vers 0, l'axe des abscisses est asymptote horizontale. Enfin, le numérateur de l étant toujours strictement positif, on obtient $\displaystyle\lim_{x\to-1^-} l(x) = \lim_{x\to1^+} l(x) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to-1^+} l(x) = \lim_{x\to1^-} l(x) = -\infty$.

La fonction l est dérivable sur son ensemble de définition, et $l'(x) = \dfrac{2e^{2x}(x^2-1) - 2xe^{2x}}{(x^2-1)^2} = \dfrac{2e^{2x}(x^2-x-1)}{(x^2-1)^2}$. Le trinôme au numérateur a pour discriminant $\Delta = 1+4 = 5$, et admet pour racines $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. On calcule péniblement $l(x_1) = \dfrac{4e^{1-\sqrt{5}}}{2-2\sqrt{5}} \simeq -0.47$ et $l(x_2) = \dfrac{4e^{1+\sqrt{5}}}{2+2\sqrt{5}} \simeq 15.7$. Voila le dernier tableau da variations de l'exercice :

x	$-\infty$		-1		x_1		1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$l(x_1)$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$l(x_2)$	↗	$+\infty$

Et la dernière courbe (ouf!) :



Exercice 3 (*)

On notera pour chaque fonction $T_{f,a}(x)$ l'équation de la tangente à la courbe de la fonction f au point d'ascisse a.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = 6x^2 - 10x + 4$. On a donc $T_{f,0}(x) = 4x - 1$; $T_{f,1}(x) = 0(x-1) + 0 = 0$; $T_{f,-2}(x) = 48(x+2) - 45 = 48x + 51$; et $T_{f,\sqrt{3}}(x) = (22 - 10\sqrt{3})(x - \sqrt{3}) + 10\sqrt{3} - 16 = (22 - 10\sqrt{3})x - 12\sqrt{3} - 6$.

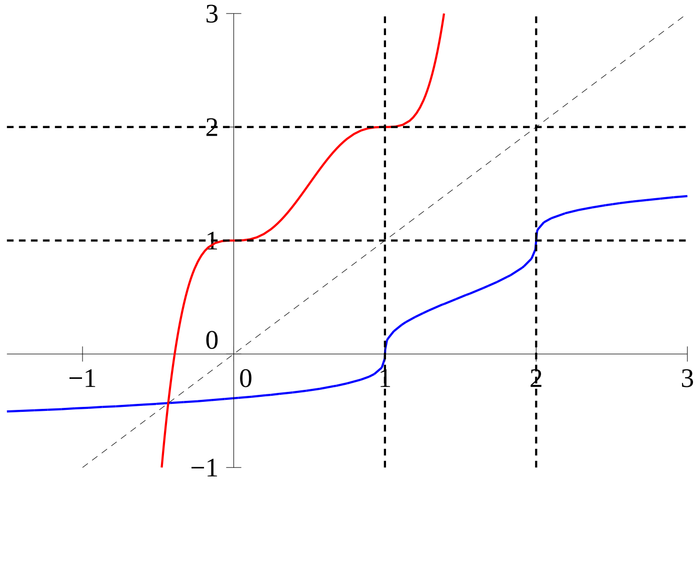
La fonction g est dérivable sur $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$, de dérivée $g'(x) = \frac{2}{2x-1}$. Les dérivées en 0 et en -2 n'existent donc pas. Par contre $T_{g,1}(x) = 2(x-1) + 0 = 2x - 2$; et $T_{g,\sqrt{3}}(x) = \frac{2}{2\sqrt{3}-1}(x - \sqrt{3}) + \ln(2\sqrt{3} - 1) = \frac{4\sqrt{3}-2}{11}(x - \sqrt{3}) + \ln(2\sqrt{3} - 1) = \frac{4\sqrt{3}-2}{11}x + \frac{2\sqrt{3}-12}{11} + \ln(2\sqrt{3} - 1)$.

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{5\}$, de dérivée $h'(x) = \frac{4x(x-5) - (2x^2+1)}{(x-5)^2} = \frac{2x^2 - 20x - 1}{(x-5)^2}$. On a donc $T_{h,0}(x) = \frac{1}{25}x - \frac{1}{5}$; $T_{h,1}(x) = -\frac{19}{16}(x-1) - \frac{3}{4} = -\frac{19}{16}x + \frac{5}{8}$; $T_{h,-2}(x) = \frac{47}{49}(x+2) - \frac{9}{7} = \frac{47}{49}x - \frac{16}{49}$; et $T_{h,\sqrt{3}}(x) = \frac{5 - 20\sqrt{3}}{28 - 10\sqrt{3}}(x - \sqrt{3}) + \frac{7}{\sqrt{3} - 5} = \frac{-460 - 510\sqrt{3}}{484}(x - \sqrt{3}) - \frac{7\sqrt{3} + 35}{22} = \left(-\frac{115}{121} - \frac{255\sqrt{3}}{242}\right)x + \frac{190}{121} + \frac{153}{242}\sqrt{3}$.

La fonction k est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $k'(x) = (6x-2)e^{3x^2-2x+1}$, donc $T_{k,0}(x) = -2ex + e$; $T_{k,1}(x) = 4e^2(x-1) + e^2 = 4e^2x - 3e^2$; $T_{k,-2}(x) = -14e^{17}(x+2) + e^{17} = -14e^{17}x - 27e^{17}$; enfin, $T_{k,\sqrt{3}}(x) = (6\sqrt{3} - 2)e^{10-2\sqrt{3}}(x - \sqrt{3}) + e^{10-2\sqrt{3}} = (6\sqrt{3} - 2)e^{10-2\sqrt{3}}x + (-17 + 4\sqrt{3})e^{10-2\sqrt{3}}$.

Exercice 4 (**)

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = 30x^4 - 60x^3 + 30x^2 = 30x^2(x^2 - 2x + 1) = 30x^2(x-1)^2$. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc bijective. Comme de plus $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, la fonction est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. D'après le théorème de la bijection, la fonction g a même sens de variation que f, elle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction g n'est pas dérivable en y si $f'(f^{-1}(y)) = 0$. Comme f' s'annule en 0 et en 1, et que $f(0) = 1$ et $f(1) = 2$, g est dérivable partout sauf en 1 et en 2.
4. Les tangentes sont en noir épais, et l'axe de symétrie $y = x$ en moins épais, la courbe de f en rouge et celle de g en bleu :

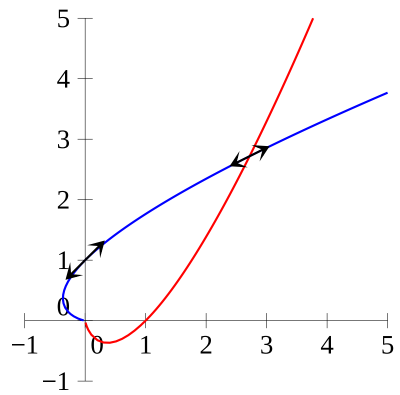


Exercice 5 (**)

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x) = \ln x + 1$. La dérivée est donc positive si $\ln x \geq -1$, c'est-à-dire si $x \geq \dfrac{1}{e}$. On a donc le tableau de variations suivant, avec $f\left(\dfrac{1}{e}\right) = \dfrac{1}{e} \times (-1) = -\dfrac{1}{e}$.

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f(x)$	0	$\searrow$ $-\frac{1}{e}$ $\nearrow$	$+\infty$

2. Comme de plus $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, la fonction f est bijective de $[\frac{1}{e}; +\infty[$ sur $[-\frac{1}{e}; +\infty[$.
3. La fonction f^{-1} est définie et continue sur $[-\frac{1}{e}; +\infty[$, mais dérivable seulement sur $]-\frac{1}{e}; +\infty[$, puisque f' s'annule en $\dfrac{1}{e}$.
4. Commençons par constater que $f(1) = 0$, donc $f^{-1}(0) = 1$ et $(f^{-1})'(0) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \dfrac{1}{f'(1)} = 1$. De même, comme $f(e) = e \ln e = e$ et $f(e^2) = e^2 \ln(e^2) = 2e^2$, on a $(f^{-1})'(e) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(e))} = \dfrac{1}{f'(e)} = \dfrac{1}{2}$ et $(f^{-1})'(2e^2) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(2e^2))} = \dfrac{1}{f'(e^2)} = \dfrac{1}{3}$.
5. Voila à quoi ça ressemble, avec la courbe de f en rouge et celle de f^{-1} en bleu (il y a hélas un bout de courbe en trop du côté de l'origine du repère qui fait que la courbe bleue n'est pas la courbe d'une fonction, mais je ne sais pas comment faire mieux avec le logiciel tout pourri que j'utilise pour tracer ces courbes), et les deux premières tangentes calculées pour f^{-1} en noir ($2e^2$ étant trop gros, la dernière n'apparait pas sur ce graphique) :



Exercice 6 (***)

1. La fonction g_n est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $g_n'(x) = ne^x - e^x - xe^x = (n - 1 - x)e^x$. Cette dérivée s'annule pour $x = n-1$, et la fonction g_n est donc strictement croissante croissante sur $0; n-1]$ et strictement décroissante sur $[n-1; +\infty[$. Elle admet un maximum de valeur $g_n(n-1) = (n-(n-1))e^{n-1} - n = e^{n-1} - n$. De plus, $g_n(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g_n(x) = -\infty$.
2. Bien entendu, l'énoncé a oublié de préciser que a_n doit être strictement positif, 0 étant aussi solution de l'équation. Une simple lecture du tableau de variations permet ensuite de constater que g_n s'annule une fois entre $n-1$ et $+\infty$. Comme $g_n(n-1) > 0$ (g_n est strictement croissante

entre 0 et $n-1$) et $g_n(n) = -n < 0$, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer que $a_n \in]n-1; n[$.

3. La fonction f_n est continue sans difficulté sur $]0; +\infty[$, et comme de plus $\dfrac{x^n}{e^x - 1} \underset{0}{\sim} \dfrac{x^n}{x} \sim x^{n-1}$, on a $\lim\limits_{x \to 0} f_n(x) = 0$, ce qui assure la continuité de f_n en 0. La fonction est donc continue sur $[0; +\infty[$.

4. Encore une fois, le seul problème se pose en 0. On a $\forall x > 0$, $f_n'(x) = \dfrac{nx^{n-1}(e^x - 1) - x^n e^x}{(e^x - 1)^2} = \dfrac{x^{n-1} g_n(x)}{(e^x - 1)^2}$. Comme $f'(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^{n-1} g_n(x)}{x^2} \sim x^{n-3} g_n(x)$, on en déduit facilement que, si $n \geq 3$, $\lim\limits_{x \to 0} f_n'(x) = 0$. Pour $n = 2$, c'est plus compliqué : on a $e^x \underset{0}{=} x + 1 + o(x)$ (en utilisant l'équivalent classique pour $e^x - 1$), donc $g_2(x) = (2-x)(1+x+o(x)) - 2 = x - x^2 + o(x)$, et $f_2'(x) \sim x^{-1} x = 1$. Finalement, en utilisant le théorème de prolongement C^1, la fonction f_n est toujours dérivable, et $f_2'(0) = 1$, ce qui donne une tangente d'équation $y = x$; $f_n'(0) = 0$ dès que $n \geq 3$ (on a alors une tangente horizontale).

5. La dérivée f_n' s'annulant quand g_n s'annule, il y a donc toujours pour f_n un maximum atteint en $x = a_n$. La limite de f_n quand x tend vers $+\infty$ vaut 0 par croissance comparée.

6. Calculons : $f_n(a_n) = \dfrac{a_n^n}{e^{a_n} - 1}$. Or, comme $g_n(a_n) = 0$, $e^{a_n} = \dfrac{n}{n - a_n}$ et $e^{a_n} - 1 = \dfrac{n}{n - a_n} - 1 = \dfrac{a_n}{n - a_n}$. On en déduit que $f_n(a_n) = \dfrac{(n - a_n) a_n^n}{a_n} = (n - a_n) a_n^{n-1}$.

7. On a $f_p(x) - f_n(x) = \dfrac{x^p - x^n}{e^x - 1}$. Si $x > 1$, $x^p > x^n$ et la courbe représentative de f_p est située au-dessus de celle de f_n. Si $x < 1$, c'est le contraire. Les courbes passent toutes par le point de coordonnées $\left(1, \dfrac{1}{e - 1}\right)$.

8. Les deux courbes ressemblent à ceci, avec la courbe de f_2 en rouge (et sa tangente initiale en noir) et celle de f_3 en bleu (difficile de placer précisément les maxima à la main puisqu'on ne connait que très approximativement la valeur de a_n) :