Feuille d'exercices n°9 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

27 novembre 2010

Exercice 1 (*)

1. Il y a $\dfrac{8!}{5!} = 336$ podiums possibles.
2. Il n'y a le choix que sur l'ordre des trois équipes, soit $3! = 6$ podiums constitués de profs de maths.
3. On passe au complémentaire : $336 - \dfrac{5!}{2!} = 336 - 60 = 276$ podiums avec au moins une équipe de profs de maths.
4. Il faut choisir l'équipe de profs de maths qui va monter sur le podium, les deux équipes sans profs de maths qui vont l'accompagner (parmi 5 possibles) et l'ordre de ces trois équipes, soit $\dbinom{3}{1}\dbinom{5}{2} \times 3! = 3 \times 10 \times 6 = 180$ podiums possibles.

Exercice 2 (**)

Si on tire simultanément :

1. Trois consonnes : $\dbinom{20}{3} = 1\ 140$ tirages.
2. Deux voyelles : $\dbinom{6}{2} \times \dbinom{20}{1} = 300$ tirages.
3. Au moins une voyelle : $\dbinom{26}{3} - \dbinom{20}{3} = 1\ 460$ tirages.

Avec des tirages successifs avec remise :

1. Deux voyelles : $6^2 \times 20 \times \dbinom{3}{1} = 2\ 160$ tirages (il faut choisir la position de la voyelle).
2. Deux lettres identiques au moins : $26 + 26 \times 25 \times \dbinom{3}{1} = 1\ 976$ (soit trois fois la même lettre, soit une lettre répétée deux fois et une autre lettre, dont il faut choisir la position).

Exercice 3 (**)

1. Il y 10 jetons au total, on en tire 4, il y a donc $\dbinom{10}{4} = 210$ tirages possibles.
2. Il faut donc tirer deux jetons bleus et deux rouges, soit $\dbinom{6}{2} \times \dbinom{4}{2} = 15 \times 6 = 90$ tirages.
3. Il ne reste plus que huit jetons disponibles, donc $\dbinom{8}{4} = 70$ tirages.
4. On a cette fois-ci 5 jetons convenables, donc $\dbinom{5}{4} = 5$ tirages possibles.

5. Il faut distinguer des cas selon les quatre numéros tirés : si on veut tirer 1, 2, 3 et 4, il y a $2^4 = 16$ tirages possibles puisqu'il existe deux jetons pour chaque numéro ; si on veut tirer le 5 et trois des numéros en double, il y a $\binom{4}{3} \times 2^3 = 32$ possibilités ; de même pour le 6 accompagné d'un des trois numéros doubles ; enfin, pour obtenir le 5, le 6 et deux des autres numéros, il y a $\binom{4}{2} \times 2^2 = 24$ possibilités. Au total, 104 tirages conviennent.
6. Là encore, plein de cas à distinguer : on peut tirer $6 + 2 + 1 + 1$ (deux cas puisqu'il y a deux 2 possibles) ; $5 + 3 + 1 + 1$ (deux cas) ; $5 + 2 + 2 + 1$ (encore deux cas) ; $4 + 4 + 1 + 1$ (un seul tirage) ; $4 + 3 + 2 + 1$ (16 cas) ; $3 + 3 + 2 + 2$ (un seul cas). Au total, on a donc 24 cas, dont les deux tiers sont constituées de la seule combinaison $4 + 3 + 2 + 1$.

Exercice 4 (***)

Avec des tirages successifs sans remise, les réponses deviennent :

- nombre total de tirages : $32^5 = 33\ 554\ 432$.
- avec deux Rois : $4^2 \times 28^3 \times \binom{5}{2} = 3\ 512\ 320$.
- au moins un pique : $32^5 - 28^5 = 16\ 344\ 064$.
- un As et deux carreaux : il faut distingues les cas où on tire deux fois l'As de carreau, ceux ou tire une fois l'As de carreau et une fois un autre carreau, et ceux où on tire deux carreaux qui ne sont pas l'As, ce qui donne $21^3 \times \binom{5}{2} + 7 \times 21^3 \times 5 \times 4 + 3 \times 7^2 \times 21^2 \times 5 \times \binom{4}{2} = 3\ 333\ 960$.
- pas de carte en-dessous du 9 : $24^5 = 7\ 962\ 624$.
- deux paires : il faut toujours choisir les rangs des deux paires, les cartes à tirer dans chaque paire et la dernière carte, mais également l'emplacement des cartes de la première paire dans le tirage, et celui des cartes de la deuxième paire, soit $\binom{8}{2} \times 4^2 \times 4^2 \times 24 \times \binom{5}{2} \times \binom{3}{2} = 5\ 160\ 960$.
- cinq cartes de la même couleur : $4 \times 8^5 = 131\ 072$.
- quinte flush : $16 \times 5! = 1\ 920$.

Exercice 5 (**)

Notons k le nombre de sauts de deux marches effectués par la puce. Elle saute $2k$ marches à l'aide de ces sauts, donc effectue $13 - 2k$ sauts d'une marche, soit au total $13 - k$ sauts. Ne reste plus qu'à choisir la position des sauts de 2 marches, et comme k peut varier entre 0 et 6, il y a au total $\sum_{k=0}^{6} \binom{13-k}{k} = 377$ possibilités.