Feuille d'exercices n°7 : Dénombrement

ECE3 Lycée Carnot

12 novembre 2010

Exercice 1 (**)

Une urne contient cinq boules blanches et huit boules noires. On tire successivement et avec remise quatre boules dans l'urne. Quel est le nombre de tirages vérifiant chacune des conditions suivantes :

- au moins une boule blanche a été tirée
- une boule noire au plus a été tirée
- trois boules noires et une boule blanche ont été tirées dans cet ordre
- deux boules noires et deux boules blanches ont été tirées

Exercice 2 (**)

Dans un jeu de tarot, il y a 21 atouts. On en tire (simultanément) cinq au hasard. Combien y a-t-il de tirages pour lesquels :

- au moins un atout est un multiple de cinq ?
- il y a exactement un multiple de cinq et un multiple de trois ?
- on a tiré le 1 ou le 21 ?

Exercice 3 (*)

Une assemblée est constituée de 200 membres. Elle doit élire une commission constituée de trois parlementaires (chaque membre vote donc pour trois personnes). On s'intéresse au nombre de membres ayant voté pour trois candidats qu'on désignera par A, B et C (et qui ne sont pas les seuls candidats). On sait que 112 membres ont voté pour A, 67 pour A et B, 32 pour A et C, 12 pour A, B et C, 5 pour B et C mais pas pour A, 56 pour C mais pas pour A ni B, et 22 pour B mais pas pour A.

1. Combien ont voté pour A mais pas pour B ?
2. Combien ont voté pour C ?
3. Combien n'ont voté pour aucun des trois candidats ?
4. Combien ont voté uniquement pour A ?

Exercice 4 (** à ***)

On tire 5 cartes dans un jeu de 32 cartes usuel. Combien y a-t-il de tirages possibles vérifiant les conditions suivantes :

- Aucune condition.
- Il y a deux Rois parmi les cinq cartes tirées.
- Il y a au moins un pique parmi les cartes tirées.
- Il y a un As et deux carreaux parmi les cartes tirées.
- Il n'y a pas de cartes en-dessous du 9 parmi les cartes tirées.
- Les cinq cartes tirées forment deux paires (mais pas de brelan).
- Les cinq cartes tirées sont de la même couleur.
- Les cinq cartes tirées forment une quinte flush (cinq cartes qui se suivent dans la même couleur).

Exercice 5 (***)

Soit E un ensemble fini comportant 6 éléments. On cherche à déterminer le nombre de couples de parties (A, B) de E vérifiant $A \cup B = E$ (par exemple, si $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $A = \{1; 2; 3; 5\}$ et $B = \{2; 4; 5; 6\}$ constituent un couple possible).

1. Rappeler quel est le nombre de parties de E ayant 2 élements. Si on fixe une telle partie A, combien peut-on trouver de parties B vérifiant $A \cup B = E$?
2. Faire le même raisonnement pour les parties à 0, 1, 3, 4, 5 et 6 éléments de E.
3. En déduire la solution du problème posé.
4. Généraliser au cas où l'ensemble fini E possède n éléments (donner le résultat sous forme d'une somme puis la calculer à l'aide du binôme de Newton).

Exercice 6 (*)

Calculer le nombre d'anagrammes des mots MISSISSIPI et ABRACADABRA.

Exercice 7 (**)

De combien de manières peut-on classer quatre personnes en admettant qu'il puisse y avoir des ex æquo ?

Exercice 8 (**)

On lance n fois de suite un dé à 4 faces et on note p_n la probabilité que chacun des quatre résultats possibles apparaisse au moins une fois lors de ces n lancers.

1. Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. Dénombrer les tirages pour lesquels chacun des quatre chiffres apparait au moins une fois, et en déduire p_n (il suffit de diviser le nombre de cas favorables, que vous venez de calculer, par le nombre total de tirages possibles).
3. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$. Que peut-on en déduire ?
4. Déterminer à l'aide de la calculatrice la plus petite valeur de n pour laquelle $p_n \geq 0.9$.

Exercice 9 (*)

Développer les expressions suivantes : $(x-3)^5$; $(2x+3y)^3$; $(x-1)^7$.

Exercice 10 (***)

Donner une expression simple des sommes $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k$; $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$ (pour les deux dernières, il est fortement conseillé de partir de la formule du binome appliquée à $(1+x)^n$, où x est un réel quelconque).

Exercice 11 (*)

Soient p, q et n trois entiers tels que $p + q + 2 \leq n$. Montrer que $\binom{n}{2} - \binom{n-p}{2} - \binom{n-q}{2} + \binom{n-p-q}{2} = pq$