# Feuilles d'exercices n°1 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

7 septembre 2010

## Exercice 1 (**)

- $f(x) = 0$ n'aura pas de solution si $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$.
- $f$ est constante se traduit par exemple par $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x) = f(y)$ ; ou par $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a$. Notez que $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ f(x) = f(y)$ marche aussi (alors que ça semble moins fort que la première proposition).
- tout réel a (au moins) un antécédent par $f$ si $\forall a \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = a$.
- $f$ ne prend pas de valeur négative si $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0$ (ça, c'est assez facile !).
- tout réel a (au moins) deux antécédents par $f$ si $\forall a \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \neq x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(y) = a$ (il est essentiel que $x$ et $y$ soient distincts).
- $f$ ne prend jamais deux fois la même valeur : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \neq x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq f(y)$. On peut également proposer $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

## Exercice 2 (** à ***)

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant x$ : FAUX, ça ne marche pas si $x \in ]0; 1[$, par exemple $x = 0.5$.
2. $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2$ : VRAI, il existe deux tels réels, $x = \sqrt{2}$ et $x = -\sqrt{2}$.
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists p \in \mathbb{N},\ n = 2p$ : FAUX, ce n'est vrai que si $n$ est pair.
4. $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists p \in \mathbb{N},\ p = 3n$ : VRAI, on ne voit pas bien ce qui pourrait nous empêcher de multiplier un entier naturel par 3, et le résultat sera toujours un entier naturel.
5. $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists p \in \mathbb{N},\ n(n+1) = 2p$ : VRAI, cela revient à dire que $n(n+1)$ est toujours pair. En effet, parmi $n$ et $n+1$, l'un des deux nombres est pair et l'autre impair, on obtient donc un nombre pair en faisant leur produit.
6. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x \geqslant y^2$ : FAUX, si $x$ est strictement négatif, il n'est supérieur à aucun carré.
7. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x < y^2$ : VRAI, pour le coup, tous les $x$ strictement négatifs sont des exemples (cette proposition était en fait la négation de la précédente).
8. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x > y^2$ : FAUX, on a par exemple toujours $x < (x+1)^2$
9. $\forall x > 0,\ \exists y > 0,\ y < x$ : VRAI, il suffit de prendre par exemple $y = \dfrac{x}{2}$.
10. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \exists z \in \mathbb{R},\ e^y = xz^2$ : VRAI, ça parait un peu alambiqué, mais il suffit en fait de prendre $x = 1$, et, quelle que soit la valeur de $y$, de poser $z = \sqrt{e^y}$.

## Exercice 3 (*)

C'est très facile si on a compris qu'une négation transformait un quantificateur universel en quantificateur existentiel et vice-versa.

1. $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 \leqslant 0$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ 2x - 1 \neq 12$

3. $\exists n \in \mathbb{N}$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $n \neq 2p$
4. $\exists n \in \mathbb{N}$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $p \neq 3n$
5. $\exists n \in \mathbb{N}$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $n(n+1) \neq 2p$
6. $\exists x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, $x < y^2$
7. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}$, $x \geqslant y^2$
8. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}$, $x \leqslant y^2$
9. $\exists x > 0$, $\forall y > 0$, $y \geqslant x$
10. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}$, $\forall z \in \mathbb{R}$, $e^y \neq xz^2$

## Exercice 4 (**)

Barnabé et Clothaire disant le contraire l'un de l'autre, l'un d'eux dit nécessairement la vérité. Comme deux des trois accusés mentent, un seul a dit la vérité, et d'après ce qui précède ce n'est pas Aristide. Autrement dit, Aristide ment, et c'est donc lui le voleur (vous pouvez vérifier la cohérence de l'ensemble).

## Exercice 5 (*)

1. $\dfrac{2^5 \times 25 \times 3^{-4} \times 36}{3^8 \times 15 \times 100} = \dfrac{2^5 \times 5^2 \times 3^{-4} \times 2^2 \times 3^2}{3^8 \times 3 \times 5 \times 2^2 \times 5^2} = \dfrac{2^5}{3^{11} \times 5}$
2. $\ln(96) = \ln(2^5 \times 3) = 5\ln 2 + \ln 3$
3. $\dfrac{e^{x^2}}{e^{3x}} = e^{x^2-3x} = e^{x(x-3)}$
4. $\dfrac{3\sqrt{72}}{2\sqrt{162}} = \dfrac{3\sqrt{2^3 \times 3^2}}{2\sqrt{2 \times 3^4}} = \dfrac{2 \times 3^2 \times \sqrt{2}}{2 \times 3^2\sqrt{2}} = 1$
5. $e^{-\ln(10)} = \dfrac{1}{e^{\ln 10}} = \dfrac{1}{10}$

## Exercice 6 (* à ***)

1. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 25 - 4 \times 6 = 1$, donc admet deux racines réelles $x_1 = \dfrac{5+1}{2} = 3$, et $x_2 = \dfrac{5-1}{2} = 2$, donc $\mathcal{S} = \{2; 3\}$.
2. On constate que 1 est racine de ce polynome puisque $2-4+3-1 = 0$. On peut donc factoriser par $x-1$ : $(2x^3 - 4x^2 + 3x - 1) = (x-1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$. Par identification, on obtient $a = 2$, $b = -2$ et $c = 1$, donc $2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = (x-1)(2x^2 - 2x + 1)$. Cherchons les racines de ce dernier trinome, qui a pour discriminant $\Delta = 4 - 8 = -4$. Il n'y a donc pas de racines réelles, et concernant l'équation initiale, $\mathcal{S} = \{1\}$.
3. Posons $X = \sqrt{x}$ (en notant au passage que l'équation ne peut avoir de sens que si $x \geqslant 0$ et $X \geqslant 0$). L'équation devient alors $X^2 = X + 2$, soit $X^2 - X - 2 = 0$. Ce trinome a pour discriminant $\Delta = 1 - 4 \times (-2) = 9$, et admet donc deux racines réelles $X_1 = \dfrac{1+3}{2} = 2$ et $X_2 = \dfrac{1-3}{2} = -1$. Cette dernière solution est à exclure. Comme on a, par définition de $X$, $x = X^2$, on obtient donc $\mathcal{S} = \{4\}$.
4. Encore un petit changement de variable : on pose $X = \ln x$ ($x$ doit donc être strictement positif) et on se ramène à l'équation $X^2 - 5X - 12 = 0$, de discriminant $\Delta = 25 + 4 \times 12 = 73$, ayant donc deux racines réelles $X_1 = \dfrac{5+\sqrt{73}}{2}$ et $X_2 = \dfrac{5-\sqrt{73}}{2}$. Ensuite, on utilise $x = e^X$, donc $\mathcal{S} = \{e^{\frac{5-\sqrt{73}}{2}}; e^{\frac{5+\sqrt{73}}{2}}\}$.

5. Réécrivons l'équation en multipliant les deux membres par $e^x$ (qui est toujours strictement positif, donc ça ne pose pas de problème) : $(e^x)^2 + 1 = 2e^x$, soit en posant $X = e^x$ ($X$ sera donc toujours positif) $X^2 - 2X + 1 = 0$. On reconnait une identité remarquable : $(X-1)^2 = 0$, qui a pour unique solution $X = 1$. Puisque $x = \ln X$, l'équation initiale a donc pour solution $\mathcal{S} = \{0\}$.
6. Un petit travail de réécriture s'impose à nouveau : $\ln((x+3)(x-1)) = \ln(4)$, donc (par exemple en prenant l'exponentielle de chaque membre) $(x+3)(x-1) = 4$, soit $x^2+2x-7 = 0$. Ce trinome a pour discriminant $\Delta = 4+4\times 7 = 32$, donc deux racines réelles $x_1 = \dfrac{-2-\sqrt{32}}{2} = -1-2\sqrt{2}$, et $x_2 = -1+2\sqrt{2}$. Deux solutions donc ? Pas si vite ! Pour que l'équation initiale ait un sens, il faut absolument avoir $x+3 > 0$ et $x-1 > 0$, c'est-à-dire $x > 1$. La première solution trouvée étant inférieure à 1, on a en fait $\mathcal{S} = \{-1+2\sqrt{2}\}$.
7. $x^3 + 5x^2 \leqslant 6x \Leftrightarrow x(x^2+5x-6) \leqslant 0$. Dans le but de faire un tableau de signe, cherchons les racines de la parenthèse, qui a pour discriminant $\Delta = 25+4\times 6 = 49$, donc admet deux racines réelles $x_1 + \dfrac{-5-7}{2} = -6$ et $x_2 = \dfrac{-5+7}{2} = 1$. On en déduit le tableau de signes suivant :

| $x$ | | $-6$ | | $0$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ |
| $x^2+5x-6$ | $+$ | $0$ | $-$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x^3+5x^2-6$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

On en conclut que $\mathcal{S} = [-6; 0] \cup [1; +\infty[$
8. $\dfrac{2x-3}{x^2-4} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{2x-3-(x^2-4)}{x^2-4} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-2x-1}{x^2-4} > 0$. Le dénominateur a pour racines $-2$ et 2. Quant au numérateur, il a pour discriminant $\Delta = 4+4 = 8$, et admet deux racines réelles $x_1 = \dfrac{2-\sqrt{8}}{2} = 1-\sqrt{2}$ et $x_2 = \dfrac{2+\sqrt{8}}{2} = 1+\sqrt{2}$. D'où le tableau de signes suivant :

| $x$ | | $-2$ | | $1-\sqrt{2}$ | | $2$ | | $1+\sqrt{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-2x-1$ | $+$ | \| | $+$ | $0$ | $-$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x^2-4$ | $+$ | $0$ | $-$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ |
| $\frac{x^2-2x-1}{x^2-4}$ | $+$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ | \|\| | $-$ | $0$ | $+$ |

Conclusion : $\mathcal{S} = ]-\infty; -2[\cup]1-\sqrt{2}; 2[\cup]1+\sqrt{2}; +\infty[$
9. Commençons pas signaler que l'inéquation n'a de sens que si $2x-3 > 0$, soit $x > \dfrac{3}{2}$. Ensuite c'est très simple : puisque la fonction ln est strictement croissante, $\ln(2x-3) \leqslant \ln 5 \Leftrightarrow 2x-3 \leqslant 5 \Leftrightarrow x \leqslant 4$, donc $\mathcal{S} = \left]\dfrac{3}{2}; 4\right[$.
10. Les puissances quelconques n'étant définies que sur $\mathbb{R}_+$, on ne travaille qu'avec des nombres positifs, et on peut passer au ln : $3\times 2^{3x-4} \geqslant 2^4 \Leftrightarrow \ln 3+(3x-4)\ln 2 \geqslant 4\ln 2$, soit $(3x-8)\ln 2 \geqslant -\ln 3$, donc $x \geqslant \dfrac{8\ln 2 - \ln 3}{3\ln 2}$, donc $\mathcal{S} = \left[\dfrac{8\ln 2-\ln 3}{3\ln 2}; +\infty\right[$.

## Exercice 7 (** à ***)

- Comme $2 \leqslant 2x \leqslant 8$ et $-15 \leqslant -3y \leqslant -6$, on obtient $-12 \leqslant 2x-3y+1 \leqslant 3$.
- Comme $1 \leqslant x \leqslant 4$ et $-1 \leqslant y-3 \leqslant 2$, on obtient $-4 \leqslant x(y-3) \leqslant 8$ (séparez les cas suivant le signe de $y$ si vous n'êtes pas sûrs de vous pour ce genre de cas). On aurait aussi pu dire que $x(y-3) = xy-3x$, or $2 \leqslant xy \leqslant 20$ et $-12 \leqslant -3x \leqslant -4$, mais on obtient alors $-10 \leqslant x(y-3) \leqslant 16$, ce qui est un encadrement nettement moins précis que le précédent.
- Comme $-3 < z < 3$ ; $-\dfrac{3}{2} < \dfrac{z}{2} < \dfrac{3}{2}$.

- Comme $3 \leqslant 3x \leqslant 12$ et $\dfrac{1}{6} \leqslant \dfrac{1}{y+1} \leqslant \dfrac{1}{3}$, on obtient $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{3x}{y+1} \leqslant 4$.
- Comme $-5 < z-2 < 1$, on obtient $\dfrac{1}{z-2} < -\dfrac{1}{5}$ ou $\dfrac{1}{z-2} > 1$ (on est obligés de distinguer deux cas suivant le signe de $z$).
- On peut bien sûr encadrer $x^2 - 4x + 4$ terme par terme (ce qui donne finalement $-11 \leqslant x^2 - 4x + 4 \leqslant 16$), mais il est beaucoup plus efficace de constater que $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$. Comme $-1 \leqslant x - 2 \leqslant 2$, on a alors $0 \leqslant x^2 - 4x + 4 \leqslant 4$.
- Comme $\dfrac{1}{4} \leqslant \dfrac{1}{y-1} \leqslant 1$ et $-7 < z - 4 < -1 \Rightarrow -28 < x(z-1) < -1$, on obtient $-28 < \dfrac{x(z-4)}{y-1} < -\dfrac{1}{4}$.
- On a $2 \leqslant xy \leqslant 20$, donc $\sqrt{2} \leqslant \sqrt{xy} \leqslant 2\sqrt{5}$, et $-1 < 2 - z < 5$, donc $-3e^5 < -3e^{2-z} < -\dfrac{3}{e}$, d'où finalement $\sqrt{2} - 3e^5 < \sqrt{xy} - 3e^{2-z} < 2\sqrt{5} - \dfrac{3}{e}$.