

Feuilles d'exercices n°1 : Logique et calcul

ECE3 Lycée Carnot

7 septembre 2010

Logique

Exercice 1 (**)

Exprimer les propriétés suivantes à l'aide de quantificateurs (f étant une fonction réelle) :

- l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.
- f est constante
- tout réel a (au moins) un antécédent par f .
- f ne prend pas de valeur négative.
- tout réel a (au moins) deux antécédents par f .
- f ne prend jamais deux fois la même valeur.

Exercice 2 (** à ***)

Déterminer pour chacune des affirmations suivantes si elle est vraie ou fausse (donner un contre-exemple si la proposition est fausse, et justifier si elle est vraie) :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq x$
2. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 2$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, n = 2p$
4. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, p = 3n$
5. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, n(n+1) = 2p$
6. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x \geq y^2$
7. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x < y^2$
8. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x > y^2$
9. $\forall x > 0, \exists y > 0, y < x$
10. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R}, e^y = xz^2$

Exercice 3 (*)

Énoncer la négation de chacune des propositions de l'exercice 2 (avec des quantificateurs, bien entendu).

Exercice 4 (**)

Lors d'un cambriolage, on arrête trois suspects : Aristide, Barnabé et Clothaire. Lors de leurs interrogatoires, Aristide affirme être innocent, Barnabé prétend que Clothaire n'a pas commis le vol, alors que ce même Clothaire, au contraire, s'accuse. Il apparaît ensuite que deux des trois suspects ont menti. Qui est le voleur ?

Calcul

Exercice 5 (*)

Simplifier les expressions suivantes :

1. $\frac{2^5 \times 25 \times 3^{-4} \times 36}{3^8 \times 15 \times 100}$
2. $\ln(96)$
3. $\frac{e^{x^2}}{e^{3x}}$
4. $\frac{3\sqrt{72}}{2\sqrt{162}}$
5. $e^{-\ln(10)}$

Exercice 6 (* à ***)

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $x^2 - 5x + 6 = 0$
2. $2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = 0$
3. $x = \sqrt{x} + 2$
4. $(\ln x)^2 - 5\ln(x) = 12$
5. $e^x + e^{-x} = 2$
6. $\ln(x + 3) + \ln(x - 1) = 2 \ln 2$
7. $x^3 + 5x^2 \leq 6x$
8. $\frac{2x - 3}{x^2 - 4} < 1$
9. $\ln(2x - 3) \leq \ln 5$
10. $3 \times 2^{3x-4} \geq 2^4$

Exercice 7 (** à ***)

Soient x , y et z trois réels vérifiant $x \in [1; 4]$; $2 \leq y \leq 5$ et $|z| < 3$. Déterminer un encadrement le plus précis possibles des expressions suivantes :

- $2x - 3y + 1$
- $\frac{z}{2}$
- $\frac{1}{z - 2}$
- $\frac{x(z - 4)}{y - 1}$
- $x(y - 3)$
- $\frac{3x}{y + 1}$
- $x^2 - 4x + 4$
- $\sqrt{xy} - 3e^{2-z}$