Essec II 1998 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

5 mai 2011

Partie I

1. (a) Prouvons donc par récurrence la propriété $P_n : u_n \in [0;1]$ et $u_n \leqslant u_{n+1}$. Puisque $u_0 = 0 \in [0;1]$ et $u_1 = f(0) = e^{-a} > 0$, la propriété P_0 est vérifiée. Supposons désormais P_n vérifiée, et constatons que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (en effet, puisque $a > 0$, f est la composée de l'exponentielle et de la fonction $x \mapsto a(x-1)$, qui sont toutes deux strictement croissantes sur $\mathbb{R}$). On aura donc, en exploitant l'hypothèse de récurrence et la croissance de f, $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1)$, et $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$, c'est-à-dire $e^{-a} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$ et $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$. La propriété P_{n+1} est bien vérifiée, et la récurrence achevée.

   (b) La suite étant croissante et majorée par 1, elle converge.

2. (a) Nous aimerions appliquer l'IAF sur l'intervalle $[0;1]$, auquel appartient u_n d'après la question 1. Pour cela, chercons à encadrer f' sur cet intervalle. La fonction f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = ae^{a(x-1)} = af(x)$. La fonction f' est donc croissante comme f et, $\forall x \in [0;1]$, $f'(0) \leqslant f'(x) \leqslant f'(1)$. Comme $f'(0) = ae^{-a} > 0$ et $f'(1) = a$, on a donc $0 \leqslant f'(x) \leqslant a$ sur $[0;1]$. L'IAF nous permet alors d'affirmer, puisque $u_n \leqslant 1$, que $0 \leqslant f(1) - f(u_n) \leqslant a(1-u_n)$. Comme $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(1) = 1$, l'encadrement souhaité en découle.

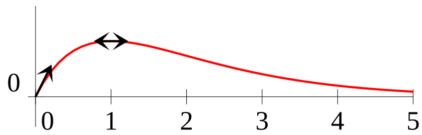
   (b) Prouvons par récurrence la propriété $P_n : 0 \leqslant 1 - u_n \leqslant a^n$. Comme $1 - u_0 = 1 = a^0$, la propriété P_0 est vérifiée. Supposons maintenant P_n vraie, alors d'après la question précédente $0 \leqslant 1 - u_{n+1} \leqslant a(1-u_n)$, avec par hypothèse $1 - u_n \leqslant a^n$. On en déduit que $0 \leqslant 1 - u_{n+1} \leqslant a \times a^n = a^{n+1}$, ce qui prouve P_{n+1} et achève la récurrence. Si $a < 1$, on aura $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = 0$ donc, en appliquant le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - u_n = 0$, soit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

3. (a)
   - Pour cela, introduisons donc la fonction $g : a \mapsto 1 - \dfrac{\ln a}{a}$. Cette fonction g est certainement dérivable sur $[1;+\infty[$, et $g'(a) = -\dfrac{1 - \ln a}{a^2}$. La fonction g est donc décroissante sur $[1;e]$ et croissante sur $[e;+\infty[$. Elle admet pour minimum sur $[1;+\infty[$ la valeur $g(e) = 1 - \dfrac{1}{e} > 0$. De plus, $g(1) = \lim\limits_{a \to +\infty} g(a) = 1$ (croissance comparée pour cette dernière limite), donc $0 < g(a) \leqslant 1$ sur $[1;+\infty[$.
   - Nous avons déjà calculé f', résolvons donc l'équation $ae^{a(x-1)} = 1$. Le plus simple est de passer au logarithme (tout est positif) pour obtenir $\ln a + a(x-1) = 0$, soit $x - 1 = -\dfrac{\ln a}{a}$, donc $x = 1 - \dfrac{\ln a}{a}$.
   - On a déjà vu plus haut que la dérivée f' était strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc $f'(x) - 1$, qui est la dérivée de $f(x) - x$, également. Si $a = 1$, la solution obtenue à la question précédente vaut 1, et $f'(x) - 1$ est donc négative sur $]-\infty;1]$ et positive ensuite. La fonction $x \mapsto f(x) - x$ est donc strictement décroissante sur $]-\infty;1]$ et strictement croissante sur $[1;+\infty[$. Elle admet pour minimum $f(1) - 1 = 0$.

     Si $a < 1$, c'est très similaire, $x \mapsto f(x) - x$ est décroissante sur $\left]-\infty; 1 - \dfrac{\ln a}{a}\right]$, et croissante sur $\left[1 - \dfrac{\ln a}{a}; +\infty\right[$. On ne cherchera pas à calculer son minimum, ça ne sert à rien !

- Les solutions de l'équation $f(x) = x$ sont les valeurs d'annulation de la fonction qu'on vient d'étudier. Si $a = 1$, puisqu'on a un minimum valant 0, 1 est la seule solution de l'équation. Par contre, si $a < 1$, 1 est toujours solution, mais la fonction atteint son minimum avant, et ce minimum est donc strictement négatif. Comme par ailleurs on sait que $f(0) - 0 > 0$ (cf calculs en début de problème) la fonction s'annule une deuxième fois entre 0 et 1. Cette valeur correspond à $r(a)$ (il ne peut pas y avoir d'autres points d'annulation au vu des variations de la fonction), qui vérifie donc $0 < r(a) < 1$.

(b)
- Cette fonction est évidemment dérivable sur $[0; +\infty[$, de dérivée $\varphi'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$. La fonction est donc croissante sur $[0; 1]$ et décroissante sur $[1; +\infty[$. De plus, $\varphi(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi x = 0$ (par croissance comparée). Pour compléter le graphique, on peut ajouter que $\varphi'(0) = 1$, ce qui permet de placer la tangente à la courbe à l'origine. Voici ladite courbe :



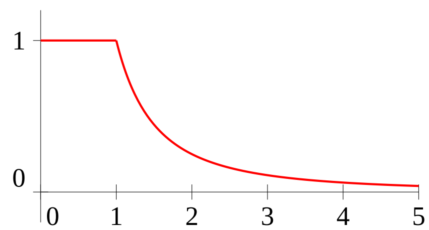
- On a $\varphi(a) = ae^{-a}$ et $\varphi(ar(a)) = ar(a)e^{-ar(a)}$. Mais rappelons-nous que, par définition, $f(r(a)) = r(a)$, c'est-à-dire que $e^{a(r(a)-1)} = r(a)$, donc $\varphi(ar(a)) = ae^{ar(a)-a}e^{-ar(a)} = ae^{-a} = \varphi(a)$. Les deux images sont tout simplement égales. Si $a > 1$, on peut en déduire, au vu du tableau de variations de φ, que $ar(a) < 1$ (chaque valeur autre que le maximum est prise exactement deux fois par φ, une fois sur $]0; 1[$ et une autre sur $]1; +\infty[$, et on ne peut bien sûr avoir $a = ar(a)$, puisque $r(a) < 1$ par construction si $a > 1$).
- La fonction est strictement croissante sur cet intervalle, elle y est certainement bijective. Tout le reste découle du théorème de la bijection : φ^{-1} est continue, strictement croissante, et vérifie $\varphi^{-1}(0) = 0$, et $\varphi^{-1}\left(\dfrac{1}{e}\right) = 1$.
- On a vu plus haut que $\varphi(ar(a)) = ae^{-a}$. Comme $ar(a) \in [0; 1]$, cela équivaut à dire que $ar(a) = \varphi^{-1}(ae^{-a})$, d'où l'égalité demandée. Comme la fonction φ^{-1} est bornée par 0 et 1, on a donc $0 \leqslant r(a) \leqslant \dfrac{1}{a}$ et, par théorème des gendarmes, $\lim\limits_{a \to +\infty} r(a) = 0$.

(c)
- C'est exactement la même récurrence qu'à la toute première question du sujet : $0 \leqslant u_0 \leqslant r(a)$ est évident, et en supposant $0 \leqslant u_n \leqslant r(a)$, il suffit d'invoquer la croissance de f pour obtenir $e^{-a} \leqslant u_{n+1} \leqslant f(r(a))$. Comme $r(a)$ est un point fixe de f, cela prouve l'encadrement pour u_{n+1} et achève la récurrence.
- On sait déjà que la suite converge vers une limite $L(a)$, et l'encadrement précédent permet d'affirmer que $0 \leqslant L(a) \leqslant r(a)$. Or, la limite de la suite est nécessairement un point fixe de f, et $r(a)$ est le plus petit de ces points fixes. Conclusion : u_n converge nécessairement vers $r(a)$. Autrement dit, $L(a) = r(a)$.
- Il y a à peu près douze mille façons d'obtenir ce qui est demandée. Une façon un peu brutale utilisant le fait que la fonction $x \mapsto f(x) - x$ change pour la première fois de signe en $r(a)$ est de calculer toutes les valeurs de $f(x) - x$ en partant de $x = 0$ et en augmentant à chaque étape x de 0.01, jusqu'à obtenir le changement de signe. Voici un programme convenable :

```
PROGRAM approxra;
USES wincrt;
VAR a,x : real;
```

```
BEGIN
WriteLn('Choisissez la valeur de a');
ReadLn(a);
x := 0;
REPEAT x := x+0.01
UNTIL exp(a*(x-1))-x<0;
WriteLn(x);
END.
```

4. On sait que la fonction L est constante égale à 1 sur $[0;1]$ (puisqu'on a $L(a)=1$ si $a \leqslant 1$). On a également vu que $\lim_{a \to +\infty} L(a) = 0$. On a bien sûr toujours $0 \leqslant L(a) \leqslant 1$ puisque $L(a) = r(a)$. On sait également que $ar(a) \leqslant 1$, donc $L(a) = r(a) \leqslant \frac{1}{a}$. On aimerait bien avoir les variations de L pour confimer l'hypothèse raisonnable que la fonction sera décroissante. Pour cela, on peut se battre avec l'expression obtenue à la fin de la question b, ou bien être malin : si on prend deux valeurs du paramètre a, qu'on note a_1 et a_2, telles que $a_1 \leqslant a_2$, alors on aura $\forall x \in [0;1]$, $e^{a_1(x-1)} \geqslant e^{a_2(x-1)}$ (puisque $x-1$ est alors négatif). En notant (v_n) la suite récurrente associée à la valeur a_1 et (w_n) celle associée à a_2, on prouve alors par une récurrence facile que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \geqslant w_n$ (en effet, si $v_n \geqslant w_n$, alors $v_{n+1} = e^{a_1(v_n-1)} \geqslant e^{a_1(w_n-1)} \geqslant e^{a_2(w_n-1)} = w_{n+1}$). Par passage à la limite, on aura $L(a_1) \geqslant L(a_2)$, ce qui prouve la décroisance de la fonction L. On peut donc imaginer une allure ressemblant à ceci (on peut calculer la pente de la demi-tangente à la courbe à droite de 1, mais cela dépasse largement nos capacités actuelles) :



Partie II

1. La condition $D = n$ impose donc que la premier client passe n instants à être servi au guichet. À chacun de ces n instants, il y a une probabilité p qu'un nouveau client arrive, et N_1 compte le nombre total de nouveaux clients. On reconnait là un cas typique de loi binomiale de paramètre (n,p). On en déduit que $\forall k \in \{0;1;\dots;n\}$, $P_{D=n}(N_1 = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ (naturellement, si $k > n$, la probabilité conditionnelle est nulle).
Les évènements $D = n$ formant un système complet d'évènements pour $n \in \mathbb{N}$ (puisque D suit une loi de Poisson, il est en effet autorisé que le client ne passe même pas un instant au guichet), on peut appliquer la formule des probabilités totales pour obtenir $P(N_1 = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_{D=n}(N_1 = k) \times P(D = n)$. On peut en fait commencer la somme à $n = k$ (avant, les probabilités conditionnelles sont nulles) et remplacer par les lois binomiale et de Poisson : $P(N_1 = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} p^k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} (1-p)^{n-k} \times \frac{\lambda^n}{n!} = \frac{e^{-\lambda} p^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(1-p)^{n-k} \lambda^n}{(n-k)!} = \frac{e^{-\lambda} p^k}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1-p)^n \lambda^{n+k}}{n!} = \frac{e^{-\lambda} p^k \lambda^k}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!}$. On reconnait une série exponentielle, pour obtenir $P(N_1 = k) = \frac{e^{-\lambda} (\lambda p)^k}{k!} \times e^{\lambda(1-p)} = \frac{e^{-\lambda p} (\lambda p)^k}{k!}$. On

vient de prouver que $N_1 \sim \mathcal{P}(\lambda p)$. En particulier, on aura $E(N_1) = \lambda p$.

2. (a) L'évènement $N_k = 0$ signifie qu'aucun nouveau client n'est apparu lors de la k-ème vague, autrement dit que la file d'attente s'est vidée après le passage de la vague précédente. Faire l'union de ces évènements revient donc à dire qu'il existe un entier pour lequel la file sera vide à l'issue de la k-ème vague, ce qui est bien équivalent à voir la file se vider en un temps fini. La suite est clairement croissante, puisque si $N_k = 0$, la k-ème restera un temps nul au guichet, ce qui ne laisse pas la possibilité pour de nouveaux clients d'arriver lors de la $(k+1)$-ème vague, et implique donc $N_{k+1} = 0$. Par le thèorème de la limite monotone, on a donc $L = \lim\limits_{n \to +\infty} P(N_k = 0)$.

   (b) Si $N_1 = 1$, on se retrouve avec une première vague constituée d'un unique client, tout comme pour la vague numérotée 0. La loi de N_2 sera donc la même que celle de N_1 en l'absence de conditionnement, celle de N_3 la même que celle de N_2 en l'absence de conditionnement etc. On a donc en particulier $P_{N_1=1}(N_{k+1} = 0) = P(N_k = 0)$. Assez similairement, si $N_1 = j$, N_2 sera constituée de la réunion des clients apparus pendant le service du premier client de la vague 1 (une sorte de première sous-vague), ceux apparus pendant le service du deuxième client (deuxième sous-vague), etc jusqu'au j-eme client (j-ème sous-vague), et on peut ainsi découper toutes les vagues ultérieures en j morceaux. La k-ème vague sera vide si chacune de ses j sous-vagues est vide, ce qui se produit avec une probabilité $P(N_k = 0)$ d'après le raisonnement précédent (on s'est ramené au cas où il n'y a qu'un client dans N_1). Toutes les sous-vagues étant indépendantes (puisque les variables B_i le sont), on a bien $P_{N_1=j}(N_{k+1} = 0) = P(N_k = 0)^j$. Cette formule est d'ailleurs valable également pour $j = 1$ et même $j = 0$ (si $N_1 = 0$, l'évènement $N_{k+1} = 0$ est certain).

   (c) Appliquons donc pour changer la formule des probabilités totales au système complet formé des évènements $N_1 = j$: $p_{k+1} = P(N_{k+1} = 0) = \sum_{j=0}^{+\infty} P_{N_1=j}(N_{k+1} = 0) \times P(N_1 = j) = \sum_{j=0}^{+\infty} p_k^j e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^j}{j!} = e^{-\lambda p} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(p\lambda p_k)^j}{j!} = e^{-\lambda p} e^{p\lambda p_k} = e^{\lambda p(p_k - 1)}$. Par ailleurs, on a bien sûr $p_0 = 0$, puisque la vague numérotée 0 est toujours constituée d'un client. On reconnait dans la suite (p_k) une suite récurrente identique à celles étudiées dans la première partie, pour $a = \lambda p$. En reprenant les résultats démontrés dans cette partie, on voit donc que la file d'attente se vide presque sûrement en temps fini lorsque $\lambda p \leqslant 1$. Si $\lambda p > 1$, on aura par contre une probabilité non nulle que la file ne s'arrête jamais, et cette probabilité tendra même vers 0 quand λp tend vers $+\infty$.

   (d) Lorsque $p = \frac{1}{2}$, la file d'attente s'achèvera presque sûrement en temps fini si la durée de service moyenne est de 1 (on a alors $\lambda p = \frac{1}{2}$) ou 2 instants ($\lambda p = 1$), mais la probabilité tombe à 0.20 si le temps de service est de quatre instants, et à 0.02 pour 8 instants. Si $p = \frac{1}{4}$, on aura une fin presque sûre avec un temps de service de 1, 2 ou 4 instants, mais une probabilité de $0,20$ que la file s'achève un jour si ce temps de service est de 8 instants.

3. (a) Si $i = 0$, la variable N_k sera identiquement nulle. Si $i \geqslant 1$, en découpant N_k en sous-vagues comme à la question 2.b, N_k sera la somme de i variables indépendantes suivant chacune une loi de Poisson de paramètre λp, ce qui donne $N_k \sim \mathcal{P}(i\lambda p)$. En particulier, $E_{N_k=i}(N_{k+1}) = i\lambda p$.

   (b) Par définition, $E(N_k) = \sum_{i=0}^{+\infty} iP(N_k = j) = \frac{1}{\lambda p} \sum_{i=0}^{+\infty} i\lambda p P(N_k = j)$. Il ne reste plus qu'à remplacer ce $i\lambda p$ par $E_{N_k=i}(N_{k+1})$ pour obtenir la formule souhaitée.

On peut désormais remplacer l'espérance conditionnelle par sa définition (sous réserve d'existence) pour obtenir $E(N_k) = \dfrac{1}{\lambda p}\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} P(N_k = i)\sum_{j=0}^{+\infty} jP_{N_k=i}(N_{k+1} = j)$

$= \dfrac{1}{\lambda p}\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} jP(N_k = i)P_{N_k=i}(N_{k+1} = j)$ en inversant les sommes comme suggéré. On reconnait désormais, au facteur constant j près, la formule des probabilités totales dans la deuxième somme, donc $E(N_k) = \dfrac{1}{\lambda p}\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} jP(N_{k+1} = j) = \dfrac{E(X_{n+1})}{\lambda p}$. Autrement dit, $E(N_{k+1}) = \lambda pE(N_k)$ (ce qui prouve au passage que $E(N_{k+1})$ existe également).

(c) On vient de voir que, si N_k admettait une espérance, alors N_{k+1} également. Comme N_0 (qui est constante égale à 1) admet certainement une récurrence, le principe de récurrence nous permet d'affirmer que N_k en admettra une pour tout entier k. De plus, la suite $(E(N_k))$ est géométrique de raison λp et de premier terme 1, donc $E(N_k) = (\lambda p)^k$.

(d) Ce nombre de total de clients est simplement donné par la somme des variables N_0, N_1, ..., jusqu'à N_n. Par linéarité de l'espérance, le nombre moyens de clients servis jusqu'à la n-ème vague vaut donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n}(\lambda p)^k = \frac{1-(\lambda p)^{n+1}}{1-\lambda p}$ si $\lambda p \neq 1$. Si $\lambda p = 1$, il vaut simplement $n+1$.

(e) Lorsque $\lambda p > 1$, la limite est infinie, ce qui est cohérent puisqu'on a une probabilité non nulle que la file d'attente ne s'arrête jamais, donc qu'on ait une infinité de clients à servir. Si $\lambda p = 1$, la file s'arrête presque sûrement, mais le nombre moyen de clients servis est tout de même infini, un cas fort intéressant. Enfin, si $\lambda p < 1$, sans surprise, le nombre moyen de clients servis au total (qui correspond à la limite) est fini, égale à $\dfrac{1}{1-\lambda p}$. Ainsi, si $\lambda p = \dfrac{1}{2}$ (par exemple une proba $\dfrac{1}{2}$ d'apparition de nouveau client à chaque instant, et un temps moyen de service d'un instant), le nombre moyen de clients servis vaut 2 (pas énorme !). Si $p = \dfrac{1}{4}$ (avec toujours un temps de service d'un instant), on descend à $\dfrac{4}{3}$ de clients servis en moyenne. Il faut vraiment que λp soit proche de 1 pour avoir des résultats plus intéressants. Par exemple, avec $p = \dfrac{1}{10}$ (une chance sur 10 qu'un nouveau client apparaisse à chaque instant) et une durée de service moyenne de 9 instants, on serivra en moyenne 10 clients avant que la file ne se vide.