Sujet de révision : Essec II 1998

ECE3 Lycée Carnot

5 mai 2011

On considère dans ce problème un guichet auquel se présentent aléatoirement des clients. L'objectif est d'étudier la file d'attente se formant à ce guichet au cours du temps, ce qui est traité dans la partie II. Dans la partie I, on étudie une suite récurrente utilisée ultérieurement.

Partie I

On considère un nombre réel strictement positif a et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{a(x-1)}$. On définit alors une suite (u_n) par son premier terme $u_0 = 0$ et la relation $u_{k+1} = f(u_k)$.

1. **Convergence de la suite (u_n).**
   (a) Établir par récurrence pour tout nombre entier n les inégalités $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ et $u_n \leqslant u_{n+1}$.
   (b) En déduire la convergence de la suite (u_n). On notera $L(a)$ sa limite.
2. **Limite de la suite (u_n) lorsque $a < 1$.**
   (a) À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, établir que $0 \leqslant 1 - u_{n+1} \leqslant a(1 - u_n)$.
   (b) En déduire l'inégalité $0 \leqslant 1 - u_n \leqslant a^n$, puis la limite $L(a)$ de la suite (u_n) pour $0 < a < 1$.
3. **Limite de la suite (u_n) lorsque $a \geqslant 1$.**
   (a) On étudie ici les racines de l'équation $f(x) = x$ lorsque $a \geqslant 1$.
   - Prouver que $0 \leqslant 1 - \dfrac{\ln a}{a} \leqslant 1$ pour $a \geqslant 1$.
   - Exprimer l'unique racine de l'équation $f'(x) = 1$ en fonction de a.
   - En déduire les variations de la fonction $x \mapsto f(x) - x$ pour $a = 1$, puis pour $a > 1$.
   - Préciser dans ces deux cas le nombre des racines de l'équation $f(x) = x$.

   On convient désormais de noter $r(a)$ la plus petite racine de l'équation $f(x) = x$.
   On vérifiera en particulier que $0 < r(a) < 1$ pour $a > 1$, et que $r(1) = 1$.

   (b) On étudie ici la plus petite racine $r(a)$ de l'équation $f(x) = x$ lorsque $a \geqslant 1$.
   - Étudier et représenter graphiquement sur $[0, +\infty[$ la fonction $\varphi : x \mapsto xe^{-x}$.
   - Comparer les images des nombres a et $ar(a)$ par cette fonction.
   - En déduire que la fonction φ réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $\left[0, \dfrac{1}{e}\right]$ et montrer que la fonction φ^{-1} est continue et strictement croissante sur $\left[0, \dfrac{1}{e}\right]$. Dresser le tableau de variation de φ^{-1}.
   - Prouver que $r(a) = \dfrac{1}{a}\varphi^{-1}(ae^{-a})$, puis déterminer la limite de $r(a)$ en $+\infty$.

   (c) On étudie maintenant la limite de la suite (u_n) lorsque $a \geqslant 1$.
   - Établir l'inégalité $0 \leqslant u_n \leqslant r(a)$.
   - En déduire la limite $L(a)$ de la suite (u_n) pour $a \geqslant 1$.
   - Écrire un programme Pascal permettant de déterminer une valeur approchée de $L(a)$ à 10^{-2} près. On obtient ainsi $L(2) = 0,20$, $L(4) = 0,02$, etc.
4. **Courbe représentative de la fonction $a \mapsto L(a)$ pour $a > 0$.**
   Déduire de ces résultats l'allure de la courbe représentative de la fonction $a \mapsto L(a)$ pour $a > 0$.

Partie II

Dans cette partie, le temps se déroule comme une succession d'instants 0, 1, 2, 3, ..., n, ... et l'on considère un guichet auquel peut se présenter au plus un client dans un intervalle de temps $[n-1, n[$, c'est à dire entre deux instants consécutifs. On suppose qu'un premier client est au guichet à l'instant 0, et, pour tout entier $n \geqslant 1$, on désigne par B_n la variable aléatoire prenant la valeur 1 si un nouveau client se présente au guichet entre les instants $n-1$ et n, et 0 sinon. Ces variables aléatoires B_1, B_2, ..., B_n, ... sont supposées indépendantes et prennent la valeur 1 avec la probabilité p ($0 < p < 1$). On appelle durée de service d'un client au guichet le temps passé par l'employé du guichet à le servir (une fois son attente dans la file achevée). Ainsi, si la durée de service du premier client est égale à n, le guichet est libre pour le service du client suivant à partir de l'instant n. Les variables aléatoires indiquant les durées de service au guichet des clients successifs sont supposées indépendantes et suivent la même loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. En particulier, on notera D la variable aléatoire indiquant la durée de service au guichet du premier client. On convient d'appeler première vague de clients l'ensemble de ceux arrivés au guichet pendant la durée de service du premier initial, puis, de façon générale, on appelle $(k+1)^{ième}$ vague de clients l'ensemble de ceux arrivés pendant la durée de service des clients de la $k^{ième}$ vague. On désigne alors par N_k le nombre aléatoire des clients de la $k^{ième}$ vague. Par convention, on pose $N_0 = 1$ (la vague numéro 0 est constituée de l'unique client présent au départ au guichet).

1. **Loi de la variable aléatoire N_1.**
   Étant donné un entier n, déterminer les probabilités conditionnelles $P_{D=n}(N_1 = k)$, et en déduire à l'aide de la formule des probabilités totales que N_1 suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

2. **Probabilité pour que la file d'attente au guichet s'achève.**

   Dans toute la suite du problème, on convient de poser $p_k = P(N_k = 0)$.

   (a) Prouver que l'évènement « la file d'attente au guichet s'achève au bout d'un temps fini » est la réunion des évènements $N_k = 0$. Montrer que cette suite d'évènements $(N_k = 0)$ est croissante, et en déduire que la probabilité que la file se vide en un temps fini, notée L, vaut $L = \lim_{k \to +\infty} P(N_k = 0)$.

   (b) Justifier que, $\forall (j, k) \in \mathbb{N}^2$, $P_{N_1=1}(N_{k+1} = 0) = P(N_k = 0)$ et $P_{N_1=j}(N_{k+1} = 0) = P(N_k = 0)^j$.

   (c) En déduire l'expression de p_{k+1} en fonction de p_k, préciser p_0 et, à l'aide des résultats de la partie I, la limite de la suite (p_k) et la probabilité pour que la file d'attente au guichet s'achève au bout d'un temps fini. On discutera et interprètera le résultat obtenu en fonction des valeurs de λp.

   (d) Déterminer les valeurs exactes ou approchées à 10^{-2} près des probabilités pour que la file d'attente au guichet s'achève au bout d'un temps fini lorsque la durée moyenne de service d'un client au guichet est égale à 1, 2, 4 ou 8 instants tandis que la probabilité pour qu'un client se présente au guichet entre deux instants consécutifs donnés est égale à 0,5 d'abord, à 0,25 ensuite.

3. **Calcul de l'espérance $E(N_k)$ de la variable aléatoire N_k.**
   On convient d'appeler espérance de la variable aléatoire N_{k+1} conditionnée par l'évènement $N_k = i$, et de noter $E_{N_k=i}(N_{k+1})$, l'espérance de N_{k+1} lorsque la probabilité est la probabilité conditionnelle sachant l'évènement $N_k = i$ réalisé, autrement dit $E_{N_k=i}(N_{k+1}) = \sum_{j=0}^{+\infty} j P_{N_k=i}(N_{k+1} = j)$.

   (a) On suppose l'évènement $N_k = i$ réalisé. Déterminer alors la loi de la durée de service de ces i clients de la $k^{\text{ième}}$ vague en distinguant les cas $i = 0$ et $i \geqslant 1$.
   En déduire la loi de la variable aléatoire N_{k+1} conditionnée par l'évènement $N_k = i$ et vérifier que $E_{N_k=i}(N_{k+1}) = i\lambda p$.

   (b) On suppose que l'espérance $E(N_k)$ existe. Établir que $E(N_k) = \dfrac{1}{\lambda p} \sum_{i=0}^{+\infty} P(N_k = i) E_{N_k=i}(N_{k+1})$.
   En admettant qu'il est alors licite de permuter les symboles $\sum$ dans le calcul, établir l'existence de l'espérance $E(N_{k+1})$ et donner son expression en fonction de λ, p et de l'espérance $E(N_k)$.

   (c) En déduire l'existence et l'expression de $E(N_k)$.

   (d) Déterminer l'espérance du nombre de clients qui se présentent au guichet jusqu'à ceux de la $n^{ième}$ vague incluse.

   (e) Discuter et interpréter la limite de cette espérance quand n tend vers $+\infty$ pour $\lambda p < 1$. Qu'obtient-on numériquement dans les cas évoqués au 2.d ?