Espaces vectoriels

ECE3 Lycée Carnot

24 juin 2011

Introduction

Pour ce dernier chapitre du cour, nous allons tenter d'introduire et commencer à étudier des notions que vous reverrez beaucoup plus en détail l'an prochain. En gros, l'idée pour nous est surtout de voir les matrices sous un autre angle, comme une façon de caractériser certaines applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Pour cela, nous allons introduire l'outil extrêmement utile mais assez formel que représentent les espaces vectoriels. Pas grand chose à voir avec les vecteurs tels que vous pouvez en avoir vu dans votre jeunesse, il s'agit de généraliser le calcul sur les coordonnées (que vous avez déjà abordé dans le cadre des vecteurs du plan ou, pour ceux qui ont fait la spécialité maths, de l'espace) à des ensembles très généraux, les fameux espaces vectoriels.

1 Espaces et sous-espaces vectoriels

Définition 1. Un ensemble E est un **espace vectoriel réel** s'il est muni d'une addition $+ : E\times E \to E$ et d'un produit par les réels $. : \mathbb{R} \times E \to E$ vérifiant les conditions suivantes :

- L'addition est associative ($\forall x, y, z \in E^3$, $(x+y)+z = x+(y+z)$) et commutative ($\forall x, y \in E^2$, $x + y = y + x$).
- Il existe un élément neutre pour l'addition, c'est-à-dire un élément de E noté 0 tel que $\forall x \in E$, $0 + x = x + 0 = 0$.
- Tout élément x de E possède un opposé dans E, c'est-à-dire un élément y tel que $x + y = y + x = 0$ (on note alors $y = -x$).
- Le produit est compatible avec le produit des réels : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}^2$, $\forall x \in E$, $\lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$.
- Le réel 1 est un élément neutre pour le produit : $\forall x \in E$, $1.x = x$.
- Le produit est doublement distributif par rapport à l'addition : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}^2$, $\forall x \in E$, $(\lambda+\mu).x = \lambda.x + \mu.x$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x, y \in E^2$, $\lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y$.

Les éléments de E sont alors appelés **vecteurs**, et les éléments de $\mathbb{R}$ par lesquels on peut les multiplier sont appelés **scalaires**.

Remarque 1. Ces conditions peuvent paraitre complexes, mais on ne les vérifie jamais en pratique, et on peut en fait les résumer simplement par le fait qu'il y a deux opérations sur notre ensemble E : une addition (qui prend deux éléments de E et sort un troisième élément de E), et un produit **par des réels** (et non pas cette fois un produit d'éléments de E) qui vérifient des conditions assez naturelles.

Exemples :

- L'ensemble des suites réelles est un espace vectoriel réel, la somme de deux suites (u_n) et (v_n) étant la suite $(u_n + v_n)$, et le produit d'une suite (u_n) par un réel λ étant la suite (λu_n). De même, l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel.
- L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices à n lignes et p colonnes est un espace vectoriel (on a prouvé toutes les propriétés de la définition précédente dans le cas des matrices lors de notre premier chapitre consacré au calcul matriciel). Attention toutefois, l'ensemble de toutes les matrices (sans spécification de taille) n'est pas un espace vectoriel (on ne peut pas additionner deux matrices de taille différente).

- L'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n est un espace vectoriel. L'ensemble $\mathbb{R}[X]$ de tous les polynômes à coefficients réels est aussi un espace vectoriel (mais pas celui des polynômes de degré n, car la somme de deux tels polynômes n'est pas forcément un polynôme de même degré).
- L'ensemble des vecteurs dans le plan (ou dans l'espace) est un espace vectoriel. On sait faire la somme de deux vecteurs (via la relation de Chasles ou la règle du parallélogramme), et faire le produit d'un vecteur par un réel. Comme vous avez appris à le faire au lycée, on peut identifier ces vecteurs à des couples de réels (dans le cas du plan) ou des triplets de réels (dans l'espace) grâce à l'introduction de coordonnées une fois un repère choisi. Plus généralement, l'ensemble $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel, dont on notera les éléments sous forme de coordonnées (comme vous aviez l'habitude de le faire dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$), la plupart du temps en ligne et non en colonne.

Définition 2. Soit E un espace vectoriel réel. Un sous-ensemble F de E est un **sous-espace vectoriel** s'il est lui-même un espace vectoriel (muni de l'addition et de la multiplication définies sur E).

Proposition 1. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si
- $0 \in F$
- $\forall x, y \in F$, $x + y \in F$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in F$, $\lambda.x \in F$.

Remarque 2. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E s'il est non vide et stable par addition et par multiplication par un réel. La proposition est évidente. On peut d'ailleur remplacer les deux dernières conditions par la suivante : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (x, y) \in F^2$, $\lambda x + y \in F$ (ce qui permet de faire une seule vérification au lieu de deux).

Exemples : L'ensemble des matrices diagonales dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel. En effet, la somme de deux matrices diagonales est diagonale, et le produit d'une matrice diagonale par un réel est diagonale.
Dans $\mathbb{R}^3$, l'ensemble $F = \{(x\ y\ z) \mid x+y+z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel mais $G = \{(x\ y\ z) \mid x+y+z = 1\}$ n'en est pas un (il ne contient pas 0, et n'est stable ni par somme ni par produit par un réel !).
L'ensemble des polynomes de degré inférieur ou égal à n est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des polynomes.
Exercice Soit E l'espace vectoriel des suites réelles. Parmi tous les sous-ensembles suivants, déterminer lesquels sont des sous-espaces vectoriels de E.

1. Les suites constantes.
2. Les suites croissantes.
3. Les suites monotones.
4. Les suites ayant une limite finie en $+\infty$.
5. Les suites géométriques.
6. Les suite récurrentes linéaires d'ordre 2.
7. Les suites périodiques.

Corrigé de l'exercice

1. C'est un sous-ev (contient la suite nulle, stable par somme et produit par un réel).
2. Ce n'est pas un sous-ev, le produit d'une suite croissante (et non constante) par -1 étant rarement une suite croissante.
3. Ce n'est pas un sous-ev non plus, car la somme d'une suite croissante et d'une suite décroissante n'est pas toujours monotone.
4. C'est un sous-ev (règles de calcul usuelles sur les limites).

5. Ce n'est pas un sous-ev, quand on additionne deux suites géométriques de raison différentes, on n'obitent pas en général une suite géométrique.
6. Ce n'est pas non plus un sous-ev, une suite récurrente linéaire d'ordre 2 peut en général s'écrire comme somme de deux suites géométriques dont les raisons sont les racines de son équation caractéristique ; ce n'est pas stable par somme (les racines n'ayant pas de raison d'être toujours les mêmes).
7. C'est un sous-ev : la suite nulle est périodique de période 1, le produit d'une suite périodique par un réel est une suite périodique de même période, et la somme de deux suites périodiques de périodes p et q est par exemple périodique de période pq.

Exemple très important : L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène de k équations à n inconnues est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathbb{R}^n$. On peut d'ailleurs toujours décrire un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ à l'aide d'un tel système d'équations.

Exemple : L'ensemble des solutions su système $\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & 3y & + & 5z & = & 0 \end{array}\right.$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On sait qu'on peut écrire les solutions d'un tel système (qui ne peut pas être de Cramer puisqu'il a plus d'inconnues que d'équations) en fonctions d'une ou plusieurs de ses inconnues. C'est la motivation de l'introduction de l'autre façon de décrire un sous-espace vectoriel, que nous allons étudier pour cette fin de paragraphe.

Définition 3. Une **famille de vecteurs** dans un espace vectoriel E est un k-uplet $(e_1, \dots, e_k)$ d'éléments de E.

Remarque 3. Attention bien sûr à ne pas confondre une famille de vecteurs de E, et un vecteur qui est souvent lui-même un n-uplet de réels.

Définition 4. Une combinaison linéaire d'une famille $(e_1, \dots, e_k)$ de vecteurs de E est un vecteur $x \in E$ qui peut s'écrire sous la forme $x = \sum_{i=1}^{i=k} \lambda_i e_i$, pour une k-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ de réels.

Exemples : Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, le vecteur $(2\ 5\ -3)$ est combinaison linéaire des vecteurs $(1\ -2\ 6)$ et $(-1\ 11\ -21)$, puisque $3(1\ -2\ 6) + (-1\ 11\ -21) = (2\ 5\ -3)$. Par contre, le vecteur $(0\ 9\ 2)$ n'est pas combinaison linéaire de ces deux même vecteurs.

Dans l'espace vectoriel des matrices à 3 lignes et 3 colonnes $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 12 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \\ -6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire des matrices $B = \begin{pmatrix} 0 & 24 & -2 \\ -6 & 2 & 0 \\ -12 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ et I puisque $A = \frac{1}{2}B + I$.

Définition 5. Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une famille de vecteurs. L'ensemble des combinaisons linéaires de cette famille est noté $Vect(e_1, \dots, e_k)$.

Proposition 2. Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une famille de vecteurs de E, alors $Vect(e_1, \dots, e_k)$ est un sous-espace vectoriel de E. C'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant e_1, e_2, …, e_k. On l'appelle sous-espace vectoriel engendré par la famille.

Démonstration. Une somme de deux combinaisons linéaires est bien une combinaison linéaire : $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^{k} \mu_i e_i = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i + \mu_i) e_i$, et de même pour un produit par un réel : $\rho \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{k} (\rho \lambda_i) e_i$, donc $Vect(e_1, \dots, e_k)$ est un sous-espace vectoriel de E. De plus, un sous-espace contenant les éléments de la famille contient aussi ses combinaisons linéaires puisqu'un sous-espace est stable par combinaisons linéaires, donc il contient forcément $Vect(e_1, \dots, e_k)$. □

Exemple : L'ensemble des éléments de $\mathbb{R}^3$ de la forme $(2x+y \;\; 3x-2y \;\; -x)$, x et y étant deux réels, est un sous-espace vectoriel. Il s'agit en fait du sous-espace vectoriel engendré par les deux vecteurs $(2\;3\;-1)$ et $(1\;-2\;0)$, puisque $(2x+y \;\; 3x-2y \;\; -x) = x(2\;3\;-1)+y(1\;-2\;0)$ s'écrit bien comme combinaison linéaire de ces deux vecteurs.

Proposition 3. L'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

Exemple : Dans $\mathbb{R}^3$, on définit F comme l'ensemble des solutions de l'équation $x-y+2z=0$, et $G = Vect((1\;0\;-1),(-2\;1\;1))$. Ces deux ensembles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, leur intersection en est donc aussi un. Pour la décrire le plus simplement possible, le mieux est d'écrire les vecteurs de G comme combinaison linaires, et de leur faire vérifier l'équation définissant F : $x \in G \Leftrightarrow x = (\lambda-2\mu \;\; \mu \;\; \mu-\lambda)$, pour un certain couple de réels (λ,μ). Le vecteur x appartient aussi à F si $\lambda-2\mu-\mu+2\mu-2\lambda=0$, soit $-\lambda-\mu=0$, donc $\mu=-\lambda$. On a alors $x=(3\lambda \;\; -\lambda-2\lambda)$, dont on déduit que $F\cap G = Vect((3\;-1\;-2))$.

Remarque 4. L'union de deux sous-espaces vectoriels n'est par contre pas un espace vectoriel en général.

2 Familles de vecteurs

2.1 Familles génératrices

Définition 6. Une famille $(e_1,\dots,e_k)$ est dite **génératrice** tout élément de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de la famille $(e_1,\dots,e_k)$: $\forall x \in E$, $\exists \lambda_1,\dots,\lambda_k$, $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i$. Autrement dit, $Vect(e_1,\dots,e_k) = E$.

Remarque 5. Pour prouver qu'une famille est génératrice, il faut prouver que l'équation $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i$, qui peut s'écrire comme un système linéaire dont les inconnues sont les coefficients λ_i, admet toujours une solution.

Exemple : Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $((0\;2\;0),(2\;-1\;2),(1\;-3\;0),(1\;-2\;3))$ est génératrice car le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & = & & & 2b & + & c & + & d \\ y & = & 2a & - & b & - & 3c & - & 2d \\ z & = & & & 2b & & & + & 3d \end{array}\right.$ admet par exemple comme solution $\left(\frac{3x}{2}+\frac{y}{2}-\frac{5z}{4},\frac{z}{2},x-z,0\right)$.
Pour la résolution, on a tout bêtement imposé $d=0$ pour se ramener à un système triangulaire aisé à résoudre. Cela signifie que la famille est toujours génératrice si on en supprime le dernier vecteur !

Proposition 4. Une famille génératrice le reste si on lui ajoute un vecteur. Elle reste également génératrice si on lui supprime un vecteur pouvant s'écrire comme combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

2.2 Familles libres

Une famille génératrice était une famille permettant de reconstituer tout l'espace E, mais contenant éventuellement « trop » de vecteurs. Une famille libre est en quelque sorte le contraire : on ne peut pas supprimer de vecteurs, mais il se peut qu'on en ait pas assez.

Définition 7. Une famille de vecteurs $(e_1,\dots,e_k)$ est **libre** si aucun de ses éléments n'est combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille (on dit que ses vecteurs sont linéairement indépendants). Autrement dit, si $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i = 0$, alors $\forall i \in \{1,\dots,k\}$, $\lambda_i = 0$. Dans le cas contraire, on dit que la famille de vecteurs est liée.

Remarque 6. Pour prouver qu'une famille est libre, il faut vérifier que le système linéaire homogène obtenu en écrivant l'égalité $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i = 0$ est de Cramer.

Exemple : Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $((2\ 1\ 0), (1\ \ -1\ \ -1), (0\ 3\ \ -1))$ est libre car le système $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 3y - z = 0 \end{cases}$ a pour unique solution $(0, 0, 0)$.

Proposition 5. Une famille libre reste libre si on supprime un de ses vecteurs. Elle reste également libre si on y ajoute un vecteur n'appartenant pas au sous-espace vectoriel engendré par la famille.

2.3 Bases et dimension

Après avoir défini des familles de vecteurs ayant trop ou pas assez de vecteurs, nous allons maintenant passer à la notion la plus intéressante, celle de famille ayant juste le bon nombre de vecteurs.

Définition 8. Une famille de vecteurs est une **base** d'un espace vectoriel E si elle est à la fois libre et génératrice. Autrement dit, tout élément de E peut s'écrire de façon unique comme combinaison linéaire d'élements de la famille.

Exemple : Considérons dans $\mathbb{R}^3$ l'ensemble F des vecteurs (x, y, z) vérifiant $3x - 2y = z$. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, il est constitué de tous les vecteurs de la forme $(x, y, 3x - 2y) = x(1, 0, 3) + y(0, 1, -2)$. La famille $((1, 0, 3); (0, 1, -2))$ est donc génératrice de F. Comme de plus elle est libre (les deux vecteurs n'étant pas proportionnels), c'est donc une base de F.

Définition 9. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in E$. Les réels λ_i sont appelés **coordonnées** de x dans la base $(e_1, \dots, e_n)$, et les vecteurs $\lambda_i e_i$ **composantes** de x dans cette même base.

Proposition 6. La famille $((1, 0, \dots, 0); (0, 1, 0, \dots, 0); \dots; (0, \dots, 0, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^n$ appelée base canonique.

Démonstration. Si on note $e_i = (0; \dots; 0; 1; 0; \dots; 0)$, tout vecteur $x = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ s'écrit sous la forme $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, donc la famille est génératrice. De plus, si on avait $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i$, on aurait donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (\mu_1, \dots, \mu_n)$, soit en décomposant suivant chaque coordonnée $\lambda_i = \mu_i$, donc chaque décomposition est unique. La famille est donc également libre. □

Définition 10. Un espace vectoriel E est **de dimension finie** s'il admet une base (une base étant toujours une famille finie). Dans ce cas, toutes les bases de E comportent le même nombre d'éléments, qui est appelé **dimension** de E.

Exemple : L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est sans surprise de dimension n.

Théorème 1. (théorème de la base incomplète) Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une famille libre dans un espace E de dimension n. Alors $k \leqslant n$ et il existe des vecteurs $e_{k+1}, \dots, e_n$ tels que $(e_1, \dots, e_n)$ soit une base de E (on peut donc compléter une famille libre en une base).

Démonstration. Ce théorème, comme l'affirmation contenue dans la définition précédente, ne seront pas démontrés cette année. □

Proposition 7. Dans un espace vectoriel de dimension n, toute famille libre possède au plus n éléments, et toute famille libre de n éléments est une base. Toute famille génératrice possède au moins n éléments, et toute famille génératrice de n éléments est une base.

Proposition 8. Soit F un sous-epace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie n. Alors F est de dimension finie $p \leqslant n$.

Démonstration. Encore un résultat plus technique qu'il n'en a l'air, que nous admettrons. □

Exemple : Nous avons montré un peu plus haut que l'ensemble des triplets (x, y, z) de réels vérifiant $3x - 2y = z$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$.

2.4 Exemples détaillés : matrices, polynomes, suites

En dehors des espaces $\mathbb{R}^n$, qui sont très intéressants mais un peu élémentaires, nous étudierons de temps à autre d'autres espaces vectoriels, qui sont constitués d'objets mathématiques d'usage courant. Voici quelques résultats sur les matrices et les polynomes.

Proposition 9. L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension np. Une base (souvent appelée base canonique) est constituée des matrices $E_{i,j}$ (pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$) ayant pour seul coefficient non nul le coefficient d'indice ij, qui vaut 1 : $E_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \dots & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Démonstration. Le fait que les ensembles de matrices soient des espaces vectoriels découle des propriétés de l'addition de matrices et du produit de matrices par un réel vues il y a maintenant quelques chapitres. De plus, la famille $E_{i,j}$ est bien génératrice puisque, si $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on a $M = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} m_{i,j} E_{i,j}$. Enfin, prouvons que la famille est libre. Supposons qu'une combinaison linéaire des vecteurs de la famille soit nulle : $\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \lambda_{i,j} E_{i,j} = 0$. La somme de gauche étant simplement la matrice dont le coefficient d'indice i, j vaut $\lambda_{i,j}$, elle est nulle seulement si tous les $\lambda_{i,j}$ sont nuls, la famille est donc bien libre. Comme il y a np éléments dans cette base, cela prouve que $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est de dimension np. □

Proposition 10. L'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ des polynomes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n est un espace vectoriel de degré $n + 1$. Une base (souvent appelée base canonique) de $\mathbb{R}_n[X]$ est constituée des polynomes $1, X, X^2, \dots, X^n$.

Démonstration. Le fait que ce soit un espace vectoriel est pénible mais facile à montrer. Ensuite, par définition, tout polynome de degré inférieur ou égal à n est une combinaison linéaire de 1, X, ..., X^n. Et si une combinaison linéaire de ces éléments est nulle, c'est qu'il s'agit du polynome dont tous les coefficients sont nuls (rappelons que cela découle du fait que le polynôme admet alors une grosse infinité de racines, ce qui n'est guère possible pour un polynôme dedegré n autre que le polynôme nul), donc la famille est libre. Comme elle est constituée de $n + 1$ éléments, cela prouve que $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n + 1$. □

Proposition 11. Dans $\mathbb{R}_n[X]$, toute famille constituée de $n+1$ polynomes de degré respectifs $n+1$, n, ..., 1 est une base.

Démonstration. Considérons une telle famille P_n, P_{n-1}, ..., P_0 (avec P_i de degré i). La famille étant constituée de $n + 1$ vecteurs, il suffit de vérifier qu'elle est libre. Supposons qu'une combinaison linéaire s'annule : $Q = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i = 0$. Un polynome est nul si tous ses coefficients sont nuls. Mais le coefficient de degré n de Q vaut λ_n fois celui de P_n puisque les autres éléments de la famille sont de degré inférieur. On doit donc avoir $\lambda_n = 0$. Mais du coup, le coefficient de degré $n-1$ de Q vaut λ_{n-1} fois celui de P_{n-1}, donc $\lambda_{n-1} = 0$, et ainsi de suite (une petite récurrence pour les courageux). Finalement, tous les λ_i sont nuls, donc la famille est libre, donc est une base. $\square$

Proposition 12. L'ensemble S des suites vérifiant une récurrence linéaire d'ordre 2 est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de l'ensemble des suites réelles. Dans le cas où son équation caractéristique admet deux solutions distinctes r_1 et r_2, les deux suites géométriques définies par $u_n = r_1^n$ et $v_n = r_2^n$ forment une base de S. Si l'équation caractéristique a une solution double r, les suites $u_n = r^n$ et $v_n = nr^n$ forment une base de S.

Démonstration. Commençons par prouver que S est un espace vectoriel de dimension 2 : S est l'ensemble des suites vérifiant une certaine relation $x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$ (pour $n \geqslant 2$). Si on prend deux suites y_n et z_n vérifiant cette relation, leur somme $y_n + z_n$ la vérifiera aussi, et de même pour λy_n. L'ensemble S est donc un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles.
Notons à présent x la suite vérifiant $x_0 = 1$, $x_1 = 0$ et qui appartient à S (donc qui vérifie la récurrence pour $n \geqslant 2$) et y la suite de S vérifiant $y_0 = 0$ et $y_1 = 1$. La famille (x, y) est libre (en effet, les deux suites ne sont pas proportionnelles), mais également génératrice de S. En effet, soit z un élément de S, $a = z_0$ et $b = z_1$, on a en fait $z = ax + by$: cela est vrai pour les deux premiers termes de la suite, et ensuite cela le reste par récurrence. On en déduit que S est de dimension 2 et que (x, y) en est une base.
Maintenant qu'on connait la dimension de S, il suffit de vérifier que (u_n) et (v_n) appartiennent à S et forment une famille libre pour constituer une base de S. Dans le cas où on a deux racines, vérifions que $(u_n) \in S$: $au_{n+1} + bu_n = ar_1^{n+1} + br_1^n = r_1^n(ar + b) = r_1^n \times r_1^2 = r_1^{n+2} = u_{n+2}$ (en effet, on a $r_1^2 = ar_1 + b$ par définition de r_1). De même, $(v_n) \in S$, et les deux suites ne sont pas proportionnelles (en effet $u_0 = v_0 = 1$, mais $u_1 \neq v_1$). La famille (u_n, v_n) est donc une base de S. De même, dans le cas où on a une racine double, la famille (r^n, nr^n) est libre car $r^1 = 1r^1$, mais $r^0 \neq 0$. De plus, r^n vérifie bien la récurrence pour la même raison que tout à l'heure et nr^n aussi : $a(n+1)r^{n+1} + bnr^n = nr^n(ar+b) + ar^{n+1} = nr^{n+2} + ar^{n+1} = r^{n+2}\left(n + \frac{a}{r}\right) = r^{n+2}(n+2) = v_{n+2}$, car, si l'équation $x^2 - ax - b = 0$ admet une racine double, celle-ci vaut $\frac{a}{2}$, donc $\frac{a}{r} = 2$. $\square$

3 Applications linéaires

3.1 Définition et exemples

Définition 11. Soient E et F deux espaces vectoriels, une **application linéaire** de E dans F est une application $f : E \to F$ vérifiant les conditions suivantes :

- $\forall (x, y) \in E^2$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$

Remarque 7. Une application $f : E \to F$ est linéaire si et seulement si $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (x, y) \in E^2$, $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$. Autrement dit, une application est linéaire si elle est compatible avec les combinaisons linéaires. On a d'ailleurs plus généralement, pour une application linéaire, $f\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(e_i)$.

Exemples : Bien que les conditions définissant une application linéaire soient assez restrictives, on peut trouver des exemples extrêmement variés dans les différents espaces vectoriels que nous avons étudiés au chapitre précédent.

- L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (2x - 3y, 4x + y, -x + 2y)$ est une application linéaire.
- L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (2x-3, 4+y, -x+2y)$ n'est pas une application linéaire (on peut constater par exemple qu'en général $f(2x, 2y) \neq 2f(x, y)$).
- L'application $f : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = AM$ est une application linéaire, quelle que soit la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- L'application $f : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = M^2$ n'est pas une application linéaire (en général, $(M + N)^2 \neq M^2 + N^2$).
- Soit E l'ensemble des suites réelles. L'application $f : E \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(u_n) = (u_0, u_8, u_{35})$ est une application linéaire.
- Soit E l'ensemble des fonctions C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'application $f : E \to E$ définie par $f(g) = g'$ est une application linéaire.
- Soit E l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle $[0; 1]$. L'application $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(g) = \displaystyle\int_0^1 g(t)dt$ est une application linéaire.

Définition 12. Une application linéaire $f : E \to F$ est aussi appelée **morphisme** de E dans F. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble de toutes les applications linéaires de l'espace vectoriel E vers l'espace vectoriel F.
Une application linéaire $f : E \to E$ est appelée **endomorphisme** de l'espace vectoriel. On note plus simplement $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
Une application linéaire bijective est appelée **automorphisme**. L'ensemble des automorphismes d'un ev E dans lui-même est parfois noté $GL(E)$.

3.2 Noyau, image d'une application linéaire

Définition 13. L'**image** d'une application linéaire $f : E \to F$ est $Im(f) = \{y \in F \mid \exists x \in E, f(x) = y\}$.

Proposition 13. Soit $f : E \to F$ une application linéaire, alors f est surjective si et seulement si $Im(f) = F$.

Démonstration. Pas de démonstration, puisque c'est la définition d'une application surjective. □

Proposition 14. L'image d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel de F.

Démonstration. Rien de bien difficile. L'image contient le vecteur nul, puisque $f(0) = 0$. Si $y \in Im(f)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $y = f(x)$, donc $f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda y$, donc $\lambda y \in Im(f)$. De même, si y et y' sont dans l'image de f, $y = f(x)$ et $y' = f(x')$, donc $f(x + x') = y + y'$, qui est donc dans l'image. □

Proposition 15. Soit $f : E \to F$ une application linéaire de E dans F et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, alors $Im(f) = Vect(f(e_1), \dots, f(e_n))$.

Démonstration. Comme les vecteurs $f(e_1), \dots, f(e_n)$ appartiennent à $Im(f)$, on a nécessairement $Vect(f(e_1), \dots, f(e_n)) \subset Im(f)$. De plus, soit $y \in Im(f)$, on a $y = f(x)$, et comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, on peut écrire $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i e_i$. On a alors $y = f(x) = f\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i e_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i f(e_i)$, donc $y \in Vect(e_1, \dots, e_n)$, et les deux ensembles sont bien égaux. □

Remarque 8. Attention, en général, $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ n'est pas une base de $Im(f)$, mais seulement une famille génératrice.

Exemple 1 : La méthode élémentaire pour calculer une image est d'utilser la définition. Prenons par exemple l'applicaton linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y) = (2x - y, x + 2y, -2x + y)$. Un triplet (a,b,c) appartient à $Im(f)$ si et seulement si le système

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 2x & - & y & = & a \\ x & + & 2y & = & b \\ -2x & + & y & = & c \end{array}\right.$$

admet une solution. Les membres de gauche des deux équations extrêmes étant opposés, il faut nécessairement avoir $a = -c$, et on vérifie facilement que cette condition est suffisante. On a donc $Im(f) = \{(a,b,-a) \mid a,b \in \mathbb{R}^2\} = Vect((1,0,-1);(0,1,0))$.

Exemple 2 : En pratique, on utilisera plutôt notre dernière proposition, car c'est beaucoup plus rapide ! Reprenons le même exemple. La base canonique de $\mathbb{R}^2$ est constituée des deux vecteurs $(1,0)$ et $(0,1)$, donc l'image est engendrée par $f(1,0) = (2,1,-2)$ et $f(0,1) = (-1,2,1)$. On a donc $Im(f) = Vect((2,1,-2);(-1,2,1))$ (ce ne sont pas les mêmes vecteurs que tout à l'heure mais on peut vérifier qu'ils engendrent le même espace vectoriel).

Définition 14. Le **noyau** d'une application linéaire $f : E \to F$ est l'ensemble $Ker(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0\}$.

Remarque 9. Les lettres Ker sont les premières du mot allemand Kernel qui signifie, comme vous auriez pu le deviner, noyau.

Proposition 16. Si $f : E \to F$ est une application linéaire, alors $Ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. En effet, si $(x,y) \in Ker(f)^2$, on a $f(x) = f(y) = 0$, donc $f(x+y) = f(x)+f(y) = 0$, d'où $x + y \in Ker(f)$. De même, si $x \in Ker(f)$, $f(\lambda x) = \lambda f(x) = 0$ donc $\lambda x \in Ker(f)$. De plus, le vecteur nul appartient toujours au noyau de f. En effet, soit $x \in E$, on a $f(x) = f(x+0) = f(x)+f(0)$, donc $f(0) = f(x) - f(x) = 0$. □

Remarque 10. Pour déterminer le noyau d'une application linéaire, on est en fait amené à déterminer les solutions d'un système d'équations linéaires homogènes (on verra plus loin qu'une application linéaire s'écrit toujours sous forme de combinaisons linéaires des coordonnées).

Exemple : Déterminons le noyau de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par $(x,y,z) \mapsto (x-y+z, 3x-2y+5z, -x-3z)$. Les éléments du noyau sont les triplets de réels (x,y,z) solutions du système $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & y & + & z & = & 0 \\ 3x & - & 2y & + & 5z & = & 0 \\ -x & & & - & 3z & = & 0 \end{array}\right.$. Le système n'est pas de Cramer ($2L_1 - L_2 = L_3$), les solutions sont les triplets de la forme $(-3z, -2z, z)$, avec $z \in \mathbb{R}$. Autrement dit, le noyau de f est un sous-espace vectoriel de dimension 1 de $\mathbb{R}^3$, dont une base est constituée du vecteur $(-3,-2,1)$.

Proposition 17. Une application linéaire est injective si et seulement si $Ker(f) = \{0\}$.

Démonstration. Supposons d'abord le noyau réduit au vecteur nul et montrons que f est injective : soient $(x,y) \in E^2$ tels que $f(x) = f(y)$, alors $f(x-y) = f(x) - f(y) = 0$, donc $x - y \in Ker(f)$, donc $x - y = 0$, c'est-à-dire $x = y$, ce qui prouve bien l'injectivité. Réciproquement, supposons f injective, alors 0 a un seul antécédent par f. Or, le vecteur nul, on l'a vu, est toujours un antécédent de 0 par une application linéaire. Ceci prouve bien qu'il est le seul élément de E à appartenir à $Ker(f)$. □

4 Applications linéaires et matrices

Dans la mesure où la donnée des images des vecteurs d'une base suffit à déterminer complètement une application linéaire, il peut être tentant et pratique de représenter celles-ci par une matrice, via le petit calcul suivant : soit $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base l'ev E (supposé de dimension n), et $(f_1, f_2, \dots, f_p)$ une base de F, supposé donc de dimension p. Si $u : E \to F$ est une application linéaire, on peut écrire, pour tout x de E, $u(x) = u\left(\sum_{i=1}^{i=n} x_i e_i\right)$, où les réels x_i sont les coordonnées de x dans la base choisie, puis $u(x) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i u(e_i) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i \sum_{j=1}^{j=p} a_{i,j} e_j = \sum_{j=1}^{j=p} \left(\sum_{i=1}^{i=n} a_{i,j} x_i\right) e_j$, où le coefficient $a_{i,j}$ représente la i-ème coordonnée du vecteur e_j dans la base $(f_1, \dots, f_p)$. Cette dernière expression fait fortement penser à un produit de matrices (mais si, je vous assure), ce qui amène les définitions suivantes :

Définition 15. Soit $u : E \to F$ une application linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_p)$ une base de F. La **matrice représentant u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$** est la matrice $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ dont la i ème colonne est composée des coordonnées de $u(e_i)$ dans la base $\mathcal{B}'$. Autrement dit, si $u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$, alors $M_{i,j} = \lambda_i$.

Exemple : Soit $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $u(x, y, z) = (4x - 3x + z, -2x + y - 5z)$, la matrice de u dans les bases canoniques est $M = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$.

Définition 16. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E et $\mathcal{B}$ une base de E. On note souvent $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ (c'est-à-dire que la base de départ est la base $\mathcal{B}$ et celle d'arrivée également).

Proposition 18. En gardant les notations précédentes, si on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ la matrice-colonne des coordonnées dans $\mathcal{B}$ d'un élément $x \in E$ et $u(X) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ celle des coordonnées de son image dans $\mathcal{B}'$, alors $u(X) = MX$, où M est la matrice représentant u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

Démonstration. En effet, on a $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$, et par définition de la matrice M, on a $u(e_i) = \sum_{j=1}^{n} M_{ji} f_j$. On a donc $u(X) = \sum_{i=1}^{p} x_i \sum_{j=1}^{n} M_{ji} f_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{p} x_i M_{ji}\right) f_j$. Or, l'unique terme de la j ème ligne de la matrice colonne MX vaut précisément $\sum_{i=1}^{p} x_i M_{ji}$, donc l'égalité demandée est bien vérifiée. □

Proposition 19. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, et M la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, alors la matrice de λu dans ces mêmes bases est λM.
De même, si $(u, v) \in \mathcal{L}(E, F)^2$, et M, N leurs matrices respectives, la matrice de $u + v$ est $M + N$.
Plus intéressant, si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$, et M, N leurs matrices respectives, alors la matrice de $v \circ u$ est NM.

Démonstration. En effet, si $u(X) = MX$ et $v(X) = NX$, $\lambda u(X) = \lambda MX$; $u(X) + v(X) = MX + NX = (M + N)X$ et, lorsque cela a un sens, $v \circ u(X) = v(MX) = NMX$. □

Exemple : Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ définie par $(x, y, z) \mapsto (x - y, 2x + z)$, et $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ définie par $(x, y) \mapsto (x + y, 3x - y, -x + 2y)$. Les matrices respectives de ces deux applications linéaires dans les bases canoniques sont $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Comme $NM = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, on peut en déduire que $v \circ u(x, y, z) = (3x - y + z, x - 3y - z, 3x + y + 2z)$.

Proposition 20. Un endomorphisme est bijectif (on dit aussi inversible) si et seulement si sa matrice M dans les bases canoniques l'est. Dans ce cas, u^{-1} est également une application linéaire, et sa matrice est M^{-1}.

Démonstration. En effet, si u est bijective, u^{-1} est bien défini et $\forall X \in E$, $u^{-1}(u(X)) = X$. L'application u^{-1} est alors linéaire : si Y_1 et Y_2 sont deux éléments de E, ils ont des antécédents X_1 et X_2 par u, et $X_1 + X_2$ est alors un antécédent de $Y_1 + Y_2$ donc $u^{-1}(Y_1 + Y_2) = X_1 + Y_2$. Le cas du produit par un réel se montre de façon très similaire. Soit alors N la matrice de u^{-1} dans la base canonique, comme $u^{-1} \circ u = u \circ u^{-1} = id$ (on parle ici de l'application identité et pas de la matrice du même nom), on a en utilisant la proposition précédente $NM = MN = I$ (la matrice de l'identité dans les bases canoniques est I), donc $N = M^{-1}$. □

Pour conclure cet ultime chapitre de l'année, quelques mots sur des notions que vous reverrez nettement plus en détail l'an prochain, puisque l'algèbre linéaire sera une part importante de votre programme, et la diagonalisation la notion centrale de ce chapitre.

Définition 17. Soit $u : E \to F$ une application linéaire. Un réel λ est une **valeur propre** de u s'il existe un vecteur non nul $x \in E$ tel que $u(x) = \lambda x$. Tous les vecteurs vérifiant cette équation sont appelés **vecteurs propres** de u associés à la valeur propre λ.

Exemple : Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $u(x, y) = (2x + y, -3x - 2y)$. Dans la base canonique, u a pour matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$. On peut constater que 1 est valeur propre de u, avec comme vecteur propre asssocié (par exemple) $(1, -1)$; -1 est également valeur propre de u avec comme vecteur propre associé $(1, -3)$ puisque $u(1, -3) = (-1, 3) = -(1, -3)$. La famille constituée des deux vecteurs propres $((1, -1); (1, -3))$ est une base de $\mathbb{R}^2$ (les vecteurs ne sont pas proportionnels). L'intérêt de ce calcul de vecteurs propres vient du fait que la matrice de u dans cette nouvelle base devient nettement plus simple. En effet, elle s'écrit $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Vous verrez l'an prochain que des vecteurs propres correspondants à des valeurs propres distinctes forment toujours une famille libre, et que la matrice de u dans une base formée de vecteurs propres est toujours diagonale (comme dans cet exemple). Nous allons d'ailleurs achever le chapitre en indiquant le lien entre la diagonalisation des endormorphismes et celle des matrices vue dans un chapitre précédent.

Définition 18. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est **diagonalisable** s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale. Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si on peut trouver une base de E constituée de vecteurs propres pour u.

Définition 19. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$ deux bases d'un même espace vectoriel E. La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est la matrice $P = (p_{i,j})$, où le coefficient $p_{i,j}$ correspond à la i-ème coordonnée de f_j dans la base $\mathcal{B}$.

Proposition 21. Une matrice de passage est toujours inversible. De plus, si $u \in \mathcal{L}(E)$, en notant A et A' ses matrices respectivement dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, on a la relation $A' = P^{-1}AP$.

Exemple : Reprenons l'exemple précédent. La matrice de passage de la base canonique à la base $((1, -1); (1, -3))$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$. On calcule aisément $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, et $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, comme prévu. Vous savez donc maintenant d'où viennent ces drôles de calcul à base de PMP^{-1} qu'on effectue depuis des semaines sur les matrices. La suite ... en septembre, mais ce ne sera plus avec moi !