Best Of EDHEC : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

11 mai 2011

Exercice 1

1. (a) La fonction f_n est C^∞ sur $\mathbb{R}$ puisque le dénominateur du quotient $\dfrac{1}{1+e^x}$ ne s'annule jamais, et $f_n'(x) = -\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2} + n$; $f_n''(x) = \dfrac{-e^x(1+e^x)^2 + e^x \times 2e^x(1+e^x)}{(1+e^x)^4} = \dfrac{-e^x - e^{2x} + 2e^x}{(1+e^x)^3} = \dfrac{e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}$.

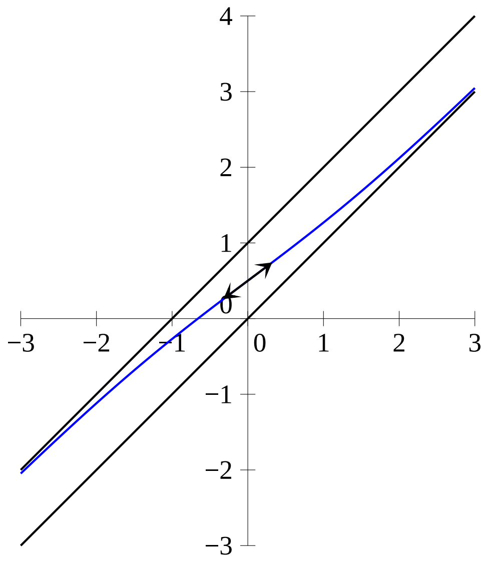
   (b) Au vu de l'expression obtenue pour f'', la fonction f' est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$, admettant donc un minimum en 0 de valeur $f'(0) = n - \dfrac{1}{4}$. Comme n est un entier naturel non nul, f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$, et f est bien strictement croissante.

2. (a) Puisque, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{1+e^x} = 1$, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty$. De même, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+e^x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$

   (b) Puisque $f_n(x) - nx = \dfrac{1}{1+e^x}$, les calculs de limites précédents prouvent que $y = nx$ est asymptote oblique à la courbe en $+\infty$, et $y = nx + 1$ en $-\infty$.

   (c) Le seul point d'annulation de f_n'' a pour abscisse 0, et ordonnée $f_n(0) = \dfrac{1}{2}$.

   (d) Comme $f_1(0) = \dfrac{1}{2}$ et $f_1'(0) = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$, la tangente a pour équation $y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{2}$. L'allure des différentes courbes est la suivante :



3. (a) La fonction étant strictement croissante et ayant pour limites $-\infty$ et $+\infty$, elle est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'équation $f_n(x) = 0$ a donc une seule solution.

(b) On a déjà vu plus haut que $f_n(0) = \frac{1}{2} > 0$; $f_n\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1+e^{-\frac{1}{n}}} - 1 = -\frac{e^{\frac{1}{n}}}{1+e^{\frac{1}{n}}} < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la valeur d'annulation de f_n se trouve donc entre $-\frac{1}{n}$ et 0.

(c) Une application du théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

(d) Puisque u_n converge vers 0, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+e^{u_n}} = \frac{1}{2}$. Or, par définition, $\frac{1}{1+e^{u_n}} = -nu_n$. On a donc $\lim_{n\to+\infty} -nu_n = \frac{1}{2}$, soit $u_n \sim -\frac{1}{2n}$.

Exercice 2

1. (a) Par indépendance des variables X et Y, $P(Z > k) = P(X > k)P(Y > k)$. Or, pour une variable de loi géométrique, $P(X > k) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} pq^{i-1} = pq^k \sum_{i=0}^{+\infty} q^i = \frac{pq^k}{1-q} = q^k$. On en déduit que $P(Z > k) = (q^k)^2 = q^{2k}$.

   (b) En effet, $(Z > k-1) = (Z > k) \cup (Z = k)$, union disjointe d'évènement, donc $P(Z > k-1) = P(Z > k) + P(Z = k)$, d'où la formule demandée.

   (c) On a donc $P(Z = k) = q^{2(k-1)} - q^{2k} = q^{2(k-1)}(1-q^2)$, ce qui correspond bien à une loi géométrique de paramètre q^2.

2. (a) En effet, si X est paire, $\frac{X}{2}$ est un entier naturel non nul (X prend des valeurs strictement positives), et si X est impaire, $\frac{X+1}{2}$ est entier aussi.

   (b) Pour tout entier strictement positif k, la variable T prend la valeur k quand $X = 2k$.

   (c) Il y a deux possibilités pour avoir $T = k$: soit $X = 2k$, soit $X = 2k-1$ (qui est bien impair). Donc $(T = k) = (X = 2k) \cup (X = 2k-1)$ (union d'évènements disjoints), et $P(T = k) = pq^{2k-1} + pq^{2k-2} = pq^{2k-2}(1+q) = (1-q)(1+q)q^{2(k-1)} = (1-q^2)q^{2(k-1)}$. On retrouve la même loi que pour Z.

3.
```
PROGRAM edhec2009;
VAR x,t,lancer : integer;
Begin
Randomize;
x := 0;
REPEAT lancer := random;
x := x+1;
UNTIL lancer<=p;
IF (x mod 2=0) THEN t := x/2 else t := (1+x)/2;
WriteLn(t);
End.
```

Exercice 3

1. (a) Puisque $\lim_{x\to0} x\ln(x) = 0$ (résultat classique de croissance comparée), on aura $\lim_{x\to0} f(x) = 0$, ce qui prouve la continuité de f en 0. La fonction étant par ailleurs continue sur $]0; +\infty[$ par théorèmes généraux, elle est continue sur $\mathbb{R}_+$.

   (b) Le dénominateur étant toujours positif, et x également, la fonction est du signe de $-\ln(x)$, soit positive sur $[0; 1]$ et négative sur $[1; +\infty[$.

2. Puisque f est continue sur $[0;x]$ lorsque $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction F est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.
3. (a) La fonction F étant la primitive de f qui s'annule en 0, elle est dérivabke de dérivée f. La fonction g est donc dérivable, et $g'(x) = f(x) - 1 = \dfrac{-x\ln x - 1 - x^2}{1+x^2} = -\dfrac{xh(x)}{1+x^2}$, en posant $h(x) = \ln x + \dfrac{1}{x} + x$ (fonction définie sur $]0;+\infty[$).
   (b) La fonction h est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$, de dérivée $h'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} + 1 = \dfrac{x^2-x+1}{x^2}$. Le numérateur de cette dérivée a pour discriminant $\Delta = 1+4 = 5$, et admet donc pour racines $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Puisqu'on ne s'intéresse ici qu'à l'intervalle $]0;+\infty[$, la valeur x_1 nous concerne peu, et h est décroissante sur $]0;x_2]$ puis croissante sur $[x_2;+\infty[$. Elle atteint son minimum en x_2, de valeur $h(x_2) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right) + \dfrac{2}{\sqrt{5}-1} + \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. Comme $x_2 > \dfrac{2-1}{2} = \dfrac{1}{2}$, la valeur approchée du ln donnée dans l'énoncé suffit à obtenir $h(x_2) > 0$. La fonction h est donc strictement positive sur $]0;+\infty[$.
   (c) En revenant au calcul effectué pour g', on constate que la fonction g est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$. Comme $g(0) = F(0) = 0$, elle est donc négative sur $[0;+\infty[$. Autrement dit, $\forall x > 0$, $F(x) < x$.
4. (a) Prouvons donc par récurrence la propriété $P_n : u_n \in [0;1]$. C'est évidemment vrai pour $u_0 = 1$. Supposons-le pour u_n, et constatons que la fonction F est croissante sur l'intervalle $[0;1]$, puisque sa dérivée f y est positive (question 1.*b*). On a donc $F(0) \leqslant F(u_n) \leqslant F(1)$. Or, $F(0) = 0$, et $F(1) < 1$ d'après la question précédente. On en déduit que $0 \leqslant u_{n+1} < 1$, ce qui prouve P_{n+1} et achève la récurrence.
   (b) On a $u_{n+1} - u_n = F(u_n) - u_n = g(u_n) \leqslant 0$ au vu de la question 4.*c* donc la suite (u_n) est décroissante.
   (c) La suite étant décroissante minorée par 0, elle converge. Sa limite est un point fixe de la fonction F, qui ne peut être que 0 puisqu'on a vu que, pour $x > 0$, $F(x) < x$. Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Problème

1. (a) On peut par exemple écrire $(T = k) = (X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \cap \cdots \cap (X_{k-1} = 1) \cap (X_k = 0)$.
   (b) La variable X_1 ne peut prendre que les valeurs 0 et 1, avec pour probabilités respectives $1-p$ et p, donc $X_1 \sim \mathcal{B}(1,p)$.
   (c) Au vu de la formulation du *a*, et la formule des probabilités composées, $P(T = k) = p^k \times (1-p)$. On reconnait ici une loi géométrique de paramètre $1-p$.
2. (a) Prouvons donc le résultat par récurrence. Pour $n = 0$ c'est évident puisque $X_0 = 0$. Supposons que $X_n(\Omega) = \{0;1;\dots;n\}$, alors notre mobile peut, pour son n-ème déplacement, avancer d'une unité sur l'axe et se retrouver à une abscisse comprise entre 1 et $n+1$; ou retourner à l'abscisse 0. Ce qui donne $X_{n+1}(\Omega) = \{0;1;\dots;n+1\}$.
   (b) C'est un peu le marteau-pilon pour écraser une mouche, mais via la formule des probabilités totales, $P(X_n = 0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} P_{X_{n-1}=k}(X_n = 0) \times P(X_{n-1} = k)$? Les probabilités conditionnelles sont toutes égales à $1-p$, donc $P(X_n = 0) = (1-p)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} P(X_{n-1} = k) = 1-p$ (la dernière valant 1, on ajoute les probabilités de toutes les valeurs prises par X_{n-1}).

3. (a) On peut utiliser à nouveau les probabilités totales, ou constater plus simplement que pour se trouver à l'abscisse k après n déplacements, il faut nécessairement avoir été à l'abscisse $k-1$ après $n-1$ déplacements, et avoir avancé d'une case (probabilité conditionnelle p).

   (b) Effectuons une petite récurrence : pour $n=1$, on a déjà étudié la loi de X_1, qui correspond bien aux formules données. Supposons les formules correctes au rang n, alors $\forall k \in \{1;2;\dots;n\}$, $P(X_{n+1}=k) = pP(X_n = k-1) = P \times p^{k-1}(1-p) = p^k(1-p)$ (on applique l'hypothèse de récurrence à l'entier $k-1$ appartenant bien à $\{0;1;\dots;n-1\}$. De plus, on a déjà vu que $P(X_n=0)=1-p$, ce qui correspond à la formule donnée. Enfin, constatons que d'après la question précédente, $P(X_{n+1}=n+1) = pP(X_n=n)$. Autrement dit, la suite $(P(X_n=n))$ est géométrique de raison p et de premier terme $P(X_0=0)=1$. ON en déduit que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(X_n=n)=p^n$. Cela n'a rien de surprenant puisque cela correspond à la situation où on a avancé à chacun des n déplacements.

   (c) Calculons $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X_n=k) = \sum_{k=0}^{n-1} p^k(1-p) + p^n = (1-p)\frac{1-p^n}{1-p} + p^n = 1$.

4. Program edhec2005 ;

```
Var k, n, u, X : integer ;
begin
Readln(n) ;
Randomize ;
X := 0 ;
For k := 1 to n do
begin
u := random(3) ;
if (u = 2) then X := X+1 ;
else X :=0 ;
end ;
Writeln (X) ;
end.
```

5. (a) Une méthode différente de celles déjà vues pour ce calcul classique : faire passer le dénominateur de la fraction de droite à gauche et développer : $(1-p)^2\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} - 2\sum_{k=1}^{n-1} kp^k + \sum_{k=1}^{n-1} kp^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-2}(k+1)p^k - 2\sum_{k=1}^{n-1} kp^k + \sum_{k=2}^{n}(k-1)p^k = \sum_{k=0}^{n-2} kp^k + \sum_{k=0}^{n-2} p^k - 2\sum_{k=1}^{n-1} kp^k + \sum_{k=2}^{n} kp^k - \sum_{k=2}^{n} p^k$. Plein de choses se télescopent et il reste $1 + p - p^{n-1} - p^n - p - (n-1)p^{n-1} + np^n = (n-1)p^n - np^{n-1} + 1$, exactement ce qu'on doit obtenir au numérateur de droite !

   (b) En effet, $E(X_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} kP(X_n=k) = (1-p)\sum_{k=1}^{n-1} kp^k + np^n = p \times \frac{(n-1)p^n - np^{n-1}+1}{1-p} + np^n = \frac{-p^{n+1}+p}{1-p} = \frac{p(1-p^n)}{1-p}$.

6. (a) Par définition, $E(X_{n+1}^2) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k^2 P(X_{n+1}=k) = \sum_{k=1}^{n+1} k^2 pP(X_n = k-1) = p\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2 P(X_n=k)$ en décalant l'indice. Il ne reste plus qu'à développer sans subtilité la somme : $E(X_{n+1}^2) = p\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2P(X_n=k) + 2kP(X_n=k) + P(X_n=k)\right) = p(E(X_n^2) + 2E(X_n)+1)$.

(b) Calculons donc :

$$\begin{array}{rcc}
u_{n+1} & = & E(X_{n+1}^2)+(2n+1)\dfrac{p^{n+2}}{1-p} \\
 & = & pE(X_n^2)+2pE(X_n)+p+(2n+1)\dfrac{p^{n+2}}{1-p} \\
 & = & pE(X_n^2)+\dfrac{2p^2(1-p^n)}{1-p}+p+\dfrac{(2n+1)p^{n+2}}{1-p} \\
 & = & pE(X_n^2)+\dfrac{2p^2-2p^{n+2}+p-p^2+(2n+1)p^{n+2}}{1-p} \\
 & = & pE(X_n^2)+\dfrac{p+p^2+(2n-1)p^{n+2}}{1-p} \\
 & = & E(X_n^2)+\dfrac{p(1+p)}{1-p}+p\dfrac{(2n-1)p^{n+1}}{1-p} \\
 & = & pu_n+\dfrac{p(1+p)}{1-p}
\end{array}.$$

(c) La suite (u_n) est donc arithmético-géométrique, d'équation de point fixe $x=px+\dfrac{p(1+p)}{1-p}$, ce qui donne $x=\dfrac{p(1+p)}{(1-p)^2}$. On pose donc $v_n=u_n-\dfrac{p(1+p)}{(1-p)^2}$, et on constate que $v_{n+1}=u_{n+1}-\dfrac{p(1+p)}{(1-p)^2}=pu_n+\dfrac{p(1+p)}{1-p}-\dfrac{p(1+p)}{(1-p)^2}=pu_n+\dfrac{p(1-p^2)-p(1+p)}{(1-p)^2}=pu_n+\dfrac{-p^2(1+p)}{(1-p)^2}=p\left(u_n-\dfrac{p(1+p)}{(1-p)^2}\right)=pv_n$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison p et de premier terme $v_0=pu_0-\dfrac{p(1+p)}{(1-p)^2}=-\dfrac{p}{1-p}-\dfrac{p(1+p)}{(1-p)^2}=-\dfrac{p(1-p)+p(1+p)}{(1-p)^2}=-\dfrac{2p}{(1-p)^2}$. On a donc $v_n=-\dfrac{2p^{n+1}}{(1-p)^2}$, et $u_n=\dfrac{p(1+p)-2p^{n+1}}{(1-p)^2}$.
Reste maintenant à calculer
$E(X_n^2)=\dfrac{p(1+p)-2p^{n+1}}{(1-p)^2}-(2n-1)\dfrac{p^{n+1}}{1-p}=\dfrac{p+p^2-2p^{n+1}-(2n-1)p^{n+1}+(2n-1)p^{n+2}}{(1-p)^2}$
$=\dfrac{p+p^2-(2n+1)p^{n+1}+(2n-1)p^{n+2}}{(1-p)^2}$.

(d) Appliquons pour finir la formule de König-Huygens :
$V(X_n)=E(X_n^2)-E(X_n)^2=\dfrac{p+p^2-(2n+1)p^{n+1}+(2n-1)p^{n+2}}{(1-p)^2}-\dfrac{p^2(1-p^n)^2}{(1-p)^2}=$
$\dfrac{p+p^2-(2n+1)p^{n+1}+(2n-1)p^{n+2}-p^2+2p^{n+2}-p^{2n+2}}{(1-p)^2}=$
$\dfrac{p-(2n+1)p^{n+1}+(2n+1)p^{n+2}-p^{2n+2}}{(1-p)^2}=\dfrac{p(1-(2n+1)(p^n-p^{n+1})-p^{2n+1})}{(1-p)^2}$, ce qui correspond à la formule de l'énoncé.