Sujet de révision : Best Of EDHEC

ECE3 Lycée Carnot

9 mai 2011

Exercice 1 (exercice 1 EDHEC 2008)

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{1}{1+e^x} + nx$.
On appelle (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 5 cm.

1. (a) Déterminer, pour tout réel x, $f_n'(x)$ et $f''(x)$.
   (b) En déduire que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x)$ ainsi que $\underset{x \to +\infty n}{f}(x)$.
   (b) Montrer que les droites (D_n) et (D_n') d'équations $y = nx$ et $y = nx + 1$ sont asymptotes de (C_n).
   (c) Déterminer les coordonnées du seul point d'inflexion, noté A_n, de (C_n).
   (d) Donner l'équation de la tangente (T_1) à la courbe (C_1) en A_1, puis tracer sur un même dessin les droites (D_1), (D_1') et (T_1) ainsi que l'allure de la courbe (C_1).
3. (a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une seule solution sur $\mathbb{R}$, notée u_n.
   (b) Montrer que l'on a, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $-\dfrac{1}{n} < u_n < 0$.
   (c) En déduire la limite de la suite (u_n).
   (d) En revenant à la définition de u_n, montrer que $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n}$.

Exercice 2 (exercice 2 EDHEC 2009)

Dans cet exercice, p désigne un réel de $]0;1[$ et on note $q = 1 - p$.
On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant toutes deux la même loi géométrique de paramètre p.

1. On pose $Z = \inf(X, Y)$ et on admet que Z est une variable aléatoire, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
   On rappelle que, pour tout entier naturel k, on a l'égalité $(Z > k) = (X > k) \cap (Y > k)$.
   (a) Pour tout entier naturel k, calculer $P(Z > k)$.
   (b) Établir que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 1, on a $P(Z = k) = P(Z > k - 1) - P(Z > k)$.
   (c) En déduire que Z suit la loi géométrique de paramètre $(1 - q^2)$.
2. On définit la variable aléatoire T de la façon suivante
   Pour tout ω de Ω tel que $X(\omega)$ est un entier naturel pair, on pose $T(\omega) = \dfrac{X(\omega)}{2}$, et, pour tout ω de Ω tel que $X(\omega)$ est un entier naturel impair, on pose $T(\omega) = \dfrac{1 + X(\omega)}{2}$. On admet que T est une variable aléatoire, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
   (a) Montrer que T prend des valeurs entières non nulles.

(b) Réciproquement, justifier que tout entier naturel k non nul est élément de $T(\Omega)$ et en déduire que $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

(c) Exprimer l'événement $(T = k)$ en fonction de certains évènements $(X = i)$ puis montrer que T suit la même loi que Z.

3. On rappelle que la fonction random renvoie de façon uniforme un réel aléatoire élément de $[0;1[$. Compléter le programme suivant pour que, d'une part, il simule les lancers d'une pièce donnant Pile avec la probabilité p et calculer la valeur prise par la variable aléatoire X égale au rang du premier Pile obtenu lors de ces lancers (X suit bien la loi géométrique de paramètre p) et pour que, d'autre part, il calcule et affiche la valeur prise par T, la variable aléatoire T ayant été définie dans la deuxième question.

```
Program edhec2009 ;
Var x,t,lancer :integer ;
Begin
     Randomize ; x :=0 ;
     Repeat lancer :=random ; x :=...... ; until(lancer <=p) ;
     If(x mod 2=0) then .... else.... ;
     Writeln(t) ;
End.
```

Exercice 3 (exercice 3 EDHEC 2002)

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x > 0,\ f(x) = \dfrac{-x\ln x}{1+x^2}$ et $f(0) = 0$.

1. (a) Vérifier que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

   (b) Étudier le signe de $f(x)$.

2. Montrer que l'on définit bien une fonction F sur $\mathbb{R}^+$, en posant $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$.

3. Pour tout x de $\mathbb{R}^+$, on pose $g(x) = F(x) - x$.

   (a) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et que, pour $x > 0$, on peut écrire $g'(x)$ sous la forme $g'(x) = \dfrac{-xh(x)}{1+x^2}$.

   (b) Étudier les variations de h, puis en déduire son signe (on donne $\ln\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \simeq -0,48$).

   (c) En déduire le signe de $g(x)$.

4. On définit la suite (u_n) par la donnée de son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence, valable pour tout entier n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = F(u_n)$.

   (a) Établir par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,1]$.

   (b) Montrer, en utilisant le résultat de la troisième question, que (u_n) est décroissante.

   (c) En déduire que la suite (u_n) converge et donner $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Problème (problème EDHEC 2005)

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O. Au départ, le mobile est à l'origine.

Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n, alors, à l'instant $n+1$ il sera sur le point d'abscisse $k+1$ avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $1-p$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n et l'on a donc $X_0 = 0$. On admet que, pour tout n de $\mathbb{N}$, X_n est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Par ailleurs, on note T

l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ).

Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont 0, 0, 1, 2, 0, 0, 1, alors on a $T = 1$. Si les abscisses successives sont 1, 2, 3, 0, 0, 1, alors on a $T = 4$. On admet que T est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. (a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer l'évènement $(T = k)$ en fonction d'évènements mettant en jeu certaines des variables X_i.
   (b) Donner la loi de X_1.
   (c) En déduire $P(T = k)$ pour tout k de $\mathbb{N}^*$, puis reconnaître la loi de T.
2. (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $X_n(\Omega) = \{0, \dots, n\}$.
   (b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, utiliser le système complet d'évènements $(X_{n-1} = k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ pour montrer que $P(X_n = 0) = 1 - p$.
3. (a) Établir que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \{1, 2, \dots, n+1\}$, $P(X_{n+1} = k) = pP(X_n = k - 1)$.
   (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in \{0, 1, 2 \dots, n-1\}$, $P(X_n = k) = p^k(1 - p)$. En déduire également la valeur de $P(X_n = n)$. Donner une explication probabiliste de ce dernier résultat.
   (c) Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) = 1$.
4. Dans cette question et dans cette question seulement, on prend $p = \dfrac{1}{3}$.

   On rappelle que `random(3)` renvoie au hasard un entier de $\{0, 1, 2\}$. Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire étudiée et affiche la valeur prise par X_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
Program edhec2005 ;
Var k, n, u, X : integer ;
begin
     Readln(n) ;
     Randomize ;
     X :=0 ;
     For k :=1 to n do
     begin
          u := random(3) ;
          if (u = 2) then X :=......... ;
               else X :=...... ;
          end ;
     Writeln (X) ;
end.
```

5. (a) Montrer que $\forall n \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} = \frac{(n-1)p^n - np^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$.
   (b) En déduire que $E(X) = \dfrac{p(1-p^n)}{1-p}$.
6. (a) Montrer, en utilisant la question 3.*a*), que $\forall n \in \mathbb{N}$, $E(X_{n+1}^2) = p(E(X_n^2) + 2EX_n) + 1)$.
   (b) Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = E(X_n^2) + (2n-1)\dfrac{p^{n+1}}{1-p}$.

   Montrer que $u_{n+1} = pu_n + \dfrac{p(1+p)}{1-p}$.
   (c) En déduire l'expression de u_n, puis celle de $E(X_n^2)$ en fonction de p et n.
   (d) Montrer enfin que $V(X_n) = \dfrac{p}{(1-p)^2}(1 - (2n+1)p^n(1-p) - p^{2n+1})$.