Ecricome 2010 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

7 juin 2011

I. Étude de parties successives.

1. La probabilité de l'événement E_2 est de $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ puisque, sur les 36 résultats possibles lorsqu'on lance simultanément deux dés à 6 faces, 6 donnent deux résultats identiques (un pour chaque face du dé). On peut aussi constater que $P(E_1) = P(E_3)$, les deux dés jouant un rôle symétrique. Or, les événements E_1, E_2 et E_3 forment un système complet, donc $P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = 1$, et $P(E_1) = P(E_3) = \frac{1 - P(E_2)}{2} = \frac{5}{12}$
2. Au vu des données de l'énoncé, la variable X_i peut prendre les valeurs 0, 1 et 2, avec probabilités respectives $\frac{5}{12}$, $\frac{5}{12}$ et $\frac{1}{6}$ en reprenant les calculs de la question précédente. On calcule sans difficulté $E(X_i) = \frac{5}{12} + \frac{2}{6} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$; puis $E(X^2) = \frac{5}{12} + \frac{4}{6} = \frac{13}{12}$, donc via la formule de König-Huygens $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{13}{12} - \frac{9}{12} = \frac{25}{48}$.
3. La variable Y_1 suit la même loi que la variable X_1 (elle lui est même égale), c'est-à-dire la loi décrite ci-dessus.
4. Par définition, $Y_2 = X_1 + X_2$, ces deux dernières variables étant supposées indépendantes. On a donc $Y_2(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4\}$; et $P(Y_2 = 0) = P((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0)) = P(X_1 = 0) \times P(X_2 = 0) = \frac{25}{144}$; $P(Y_2 = 1) = P(X_1 = 0) \times P(X_2 = 1) + P(X_1 = 1) \times P(X_2 = 0) = \frac{25}{72}$; $P(Y_2 = 2) = P(X_1 = 0) \times P(X_2 = 2) + P(X_1 = 1) \times P(X_2 = 1) + P(X_1 = 2) \times P(X_2 = 0) = \frac{5}{72} + \frac{25}{144} + \frac{5}{72} = \frac{45}{144} = \frac{5}{16}$; $P(Y_2 = 3) = P(X_1 = 1) \times P(X_2 = 2) + P(X_1 = 2) \times P(X_2 = 1) = \frac{5}{36}$; et enfin $P(Y_2 = 4) = P(X_1 = 2) \times P(X_2 = 2) = \frac{1}{36}$.
5. (a) Au bout de trois parties, tous les nombres de points compris entre 0 et 6 sont possibles : $Y_3(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

   (b) Il faut bien du courage pour remplir le gros tableau de la loi de couple, même si beaucoup de cases contiennent des 0 (si Y_2 prend la valeur k, Y_3 ne peut prendre que les valeurs k, $k+1$ et $k+2$). Un exemple de calcul détaillé : $P((Y_2 = 3) \cap (Y_3 = 4)) = P(Y_2 = 3) \times P(X_3 = 1) = \frac{5}{36} \times \frac{5}{12} = \frac{25}{432}$ (non, ne cherchez pas, ça ne se simplifie pas). Le reste n'est pas plus compliqué, ni plus intéressant d'ailleurs :

$Y_2 \backslash Y_3$	0	1	2	3	4	5	6
0	$\frac{25}{144} \cdot \frac{5}{12} = \frac{125}{1\,728}$	$\frac{25}{144} \cdot \frac{5}{12} = \frac{125}{1\,728}$	$\frac{25}{144} \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{864}$	0	0	0	0
1	0	$\frac{25}{72} \cdot \frac{5}{12} = \frac{125}{864}$	$\frac{25}{72} \cdot \frac{5}{12} = \frac{125}{864}$	$\frac{25}{72} \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{432}$	0	0	0
2	0	0	$\frac{5}{16} \cdot \frac{5}{12} = \frac{25}{192}$	$\frac{5}{16} \cdot \frac{5}{12} = \frac{25}{192}$	$\frac{5}{16} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{96}$	0	0
3	0	0	0	$\frac{5}{36} \cdot \frac{5}{12} = \frac{25}{432}$	$\frac{5}{36} \cdot \frac{5}{12} = \frac{25}{432}$	$\frac{5}{36} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{216}$	0
4	0	0	0	0	$\frac{1}{36} \cdot \frac{5}{12} = \frac{5}{432}$	$\frac{1}{36} \cdot \frac{5}{12} = \frac{5}{432}$	$\frac{1}{36} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$

(c) Pour avoir la loi marginale de Y_3, il suffit de sommer les colonnes dans le tableau, ce qui donne :

k	0	1	2	3	4	5	6
$P(Y_3 = k)$	$\frac{125}{1\ 728}$	$\frac{375}{1\ 728} = \frac{125}{576}$	$\frac{525}{1\ 728} = \frac{175}{576}$	$\frac{425}{1\ 728}$	$\frac{210}{1\ 728} = \frac{35}{288}$	$\frac{15}{432} = \frac{5}{144}$	$\frac{1}{216}$

6. (a) Assez clairement, $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Par linéarité de l'espérance, $E(Y_n) = nE(X_1) = \frac{3n}{4}$. Par indépendance des variables X_i, il va se produire la même chose pour la variance : $V(Y_n) = nV(X_1) = \frac{25n}{48}$.

(b) On recherche donc la valeur minimale de n pour laquelle $E(Y_n) \geqslant 10$, c'est-à-dire $\frac{3n}{4} \geqslant 10$, soit $n \geqslant \frac{40}{3}$. Le joueur doit donc jouer 14 fois pour que son espérance de gain dépasse 10 points.

II. Etude du temps d'attente.

1. (a) On reconnait un cas classique de loi géométrique : $T_1 \sim \mathcal{G}\left(\frac{7}{12}\right)$ (on attend que le joueur marque autre chose que 0 point, ce qui se produit à chaque partie avec probabilité $\frac{7}{12}$). En particulier, $T_1(\Omega) = \{1; 2; \dots; n; \dots\}$, et $P(T_1 = k) = \frac{7}{12}\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1}$.

(b) C'est du cours : $E(T_1) = \frac{12}{7}$, et $V(T_1) = \frac{5}{12} \times \left(\frac{12}{7}\right)^2 = \frac{60}{49}$.

2. (a) En fait, $T_2(\Omega) = \{1; 2; \dots; n; \dots\}$, tout comme pour T_1, puisqu'on peut très bien avoir deux points dès le premier essai.

(b) On a facilement $P(T_2 = 1) = P(X_1 = 2) = \frac{1}{6}$. Plus de possibilités ensuite : $P(T_2 = 2) = P((X_1 = 0) \cap (X_2 = 2)) + P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)) + P((X_1 = 2) \cap (X_2 = 2)) = \frac{5}{12} \times \frac{1}{6} + \frac{5}{12} \times \frac{5}{12} + \frac{5}{12} \times \frac{1}{6} = \frac{45}{144} = \frac{5}{16}$.

(c) Pour que $T_2 = k$ se produise, il y a en fait deux possibilités : soit on a marqué aucun point lors des $k-1$ premières parties, et on en marque 2 à la k-ème partie, ce qui se produit avec probabilité $\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6}$; soit on a obtenu une fois 1 lors d'une des $k-1$ premières parties, 0 à toutes les autres, et 1 ou 2 à la k-ème partie. En n'oubliant pas le choix de la partie ayant donné un score d'un point, cette éventualité a pour probabilité $(k-1) \times \frac{5}{12} \times \left(\frac{5}{12}\right)^{k-2} \times \left(\frac{5}{12} + \frac{1}{6}\right) = (k-1)\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \times \frac{7}{12}$. Il ne reste plus qu'à additionner ces deux probabilités pour retrouver la formule de l'énoncé.

(d) Pour $k = 1$, la formule donne simplement $P(T_1 = 1) = \frac{1}{6}$, ce qui est correct. Pour $k = 2$, on obtient $P(T_2 = 2) = \frac{5}{12} \times \frac{1}{6} + \frac{5}{12} \times \frac{7}{12}$, ce qui donne également la valeur calculée plus haut.

(e) La série converge puisqu'il s'agit d'une somme d'une série géométrique et d'une géométrique dérivée, et $\sum_{k=1}^{+\infty} P(T_2 = k) = \frac{1}{6} \times \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{12}\right)^k + \frac{7}{12} \times \sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} - \frac{7}{12} \times \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{12}\right)^k = \frac{1}{6} \times \frac{1}{1 - \frac{5}{12}} + \frac{7}{12} \times \frac{1}{(1 - \frac{5}{12})^2} - \frac{7}{12} \times \frac{1}{1 - \frac{5}{12}} = \frac{2}{7} + \frac{12}{7} - 1 = 1$.

(f) On vient de prouver que $P(\bigcup_{k=1}^{+\infty} T = k) = 1$. L'événement considéré dans cette question étant le complémentaire du précédent, il a une probabilité nulle. Autrement dit, il est quasi certain que le joueur finira par marquer deux points.

(g) Un dernier calcul (la série converge toujours comme somme de diverses séries géométriques) : $E(T_2) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} + \frac{7}{12}\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{(1-\frac{5}{12})^2} + \frac{7}{12} \times \frac{5}{12} \times \frac{2}{(1-\frac{5}{12})^3} = \frac{24}{49} + \frac{120}{49} = \frac{144}{49}$.