Sujet de révisions : Ecricome 2010

ECE3 Lycée Carnot

7 juin 2011

Dans cet exercice, on étudie des situations probabilistes liées à un jeu de dés à six faces.
Pour ce jeu, effectuer une partie consiste à lancer successivement deux dés équilibrés.
On note :
• D_1 le résultat du premier dé et D_2 le résultat du deuxième dé.
• E_1 l'événement : $(D_1 < D_2)$, E_2 l'événement : $(D_1 = D_2)$ et E_3 l'événement : $(D_1 > D_2)$.
Lors d'une partie,
• si l'événement E_1 se produit alors le joueur ne marque pas de point,
• si l'événement E_2 se produit alors le joueur marque 2 points,
• si l'événement E_3 se produit alors le joueur marque 1 point.

I. Étude de parties successives.

Soit n un entier naturel non nul. Le joueur joue successivement n parties.
Pour tout entier naturel $i \geqslant 1$, on note :
• X_i la variable aléatoire représentant le nombre de points marqués lors de la i-ème partie ;
• Y_i le nombre de points marqués après i parties.

1. Calculer la probabilité de chacun des événements E_1, E_2 et E_3.
2. Soit $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, déterminer la loi de la variable aléatoire X_i puis calculer son espérance et sa variance.
3. Trouver la loi de la variable aléatoire Y_1.
4. Quelle est la loi de la variable aléatoire Y_2 ?
5. (a) Préciser l'ensemble $Y_3(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire Y_3.
   (b) Construire et remplir le tableau de la loi conjointe du couple (Y_2, Y_3).
   (c) En déduire la loi de la variable aléatoire Y_3.
6. (a) Ecrire Y_n en fonction des variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$. En déduire l'espérance et la variance de Y_n.
   (b) En moyenne, combien de parties au minimum doit faire le joueur pour obtenir plus de 10 points ?

II. Etude du temps d'attente.

Le joueur joue maintenant jusqu'à ce qu'il dépasse un nombre de points donné.

Plus précisément on note T_1 (respectivement T_2) la variable aléatoire représentant le nombre de parties effectuées par le joueur lorsque le total de ses points est supérieur ou égal à 1 (respectivement 2) pour la première fois (si cet événement se produit).

Par exemple si les points marqués par le joueur sont dans l'ordre :
Exemple 1 : 0 0 1 0 1 2 . . . .. alors $T_1 = 3$ et $T_2 = 5$.
Exemple 2 : 0 0 0 2 1 2.... alors $T_1 = 4$ et $T_2 = 4$.

1. (a) Préciser l'ensemble $T_1(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire T_1 puis, pour tout k appartenant à $T_1(\Omega)$, donner la valeur de la probabilité $P(T_1 = k)$.

(b) Donner la valeur de l'espérance et de la variance de la variable aléatoire T_1.

2. (a) Déterminer l'ensemble $T_2(\Omega)$ des valeurs prises par la variable aléatoire T_2.

   (b) Calculer les probabilités $P(T_2 = 1)$ et $P(T_2 = 2)$.

   (c) Prouver que, pour $k \geqslant 3$, on a $P(T_2 = k) = \left(\dfrac{5}{12}\right)^{k-1} \times \dfrac{1}{6} + (k-1)\left(\dfrac{5}{12}\right)^{k-1} \times \dfrac{7}{12}$.

   (d) Ce résultat est-il valable pour $k = 1$ et $k = 2$?

   (e) Etablir que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(T_2 = k) = 1$.

   (f) Que peut-on en déduire pour l'événement « le joueur n'obtient jamais un score cumulé supérieur ou égal à 2 » ?

   (g) Calculer $E(T_2)$.