

Ecricome 2005 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

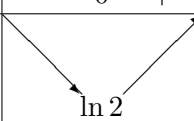
3 mai 2011

Exercice 1

1. Pour I_0 , c'est un calcul direct : $I_0 = \int_0^1 e^{-2x} dx = \left[\frac{e^{-2x}}{-2} \right]_0^1 = \frac{e^{-2} - 1}{-2} = \frac{1}{2} - \frac{e^{-2}}{2}$. Pour I_1 , on peut procéder à une intégration par parties en posant $u(x) = 1 - x$; $v'(x) = e^{-2x}$, et donc $u'(x) = -1$ et $v(x) = \frac{e^{-2x}}{-2}$, ce qui donne $I_1 = \int_0^1 (1 - x)e^{-2x} = \left[(1 - x) \frac{e^{-2x}}{-2} \right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{e^{-2x}}{-2} dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-2x} dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} I_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{e^{-2}}{4} = \frac{1 + e^{-2}}{4}$.
2. Comme $1 - x \in [0; 1]$ si $x \in [0; 1]$, on aura $(1 - x)^{n+1} \leq (1 - x)^n$ sur l'intervalle d'intégration $[0; 1]$, d'où $(1 - x)^{n+1} e^{-2x} \leq (1 - x)^n e^{-2x}$ et on en déduit en intégrant l'inégalité que $I_{n+1} \leq I_n$. La suite (I_n) est donc décroissante.
3. La fonction intégrée étant positive, $I_n \geq 0$.
4. La suite est décroissante et minorée par 0, elle converge donc.
5. La fonction g est décroissante sur $\mathbb{R}$ (et donc en particulier sur $[0; 1]$), donc on peut majorer g sur $[0; 1]$ par $g(0) = 1$.
6. Par intégration d'inégalités, on déduit du résultat précédent que $I_n \leq \int_0^1 (1 - x)^n dx = \left[-\frac{(1 - x)^{n+1}}{n + 1} \right]_0^1 = \frac{1}{n + 1}$.
7. C'est une application évidente du théorème des gendarmes.
8. Posons donc $u(x) = (1 - x)^{n+1}$ et $v'(x) = e^{-2x}$, ce qui donne $u'(x) = -(n + 1)(1 - x)^n$, et $v(x) = \frac{e^{-2x}}{-2}$, d'où $I_{n+1} = \left[(1 - x)^{n+1} \frac{e^{-2x}}{-2} \right]_0^1 - \int_0^1 -(n + 1)(1 - x)^n \frac{e^{-2x}}{-2} dx = 0 - \left(-\frac{1}{2} \right) - \frac{n + 1}{2} \int_0^1 (1 - x)^n e^{-2x} dx = \frac{1}{2} - \frac{n + 1}{2} I_n$. L'égalité demandée en découle en multipliant tout par 2.
9. On peut réécrire le résultat précédent sous la forme $nI_n = 1 - I_n - 2I_{n+1}$. En utilisant la convergence de (I_n) vers 0, le membre de droite de cette égalité tend vers 1, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = 1$.
10. Toujours en reprenant l'égalité de la question 8, on a $nI_n - 1 = -I_n - 2I_{n+1}$, donc $n(nI_n - 1) = -nI_n - 2nI_{n+1} = -nI_n - 2(n + 1)I_{n+1} + 2I_{n+1}$, et le membre de droite tend vers -3 , en utilisant cette fois le résultat de la question 9.
11. Nous avons donc $n(nI_n - 1) = -3 + \varepsilon(n)$, avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon(n) = 0$. Ou encore $nI_n - 1 = -\frac{3}{n} + \frac{\varepsilon(n)}{n}$, puis $nI_n = 1 - \frac{3}{n} + \frac{\varepsilon(n)}{n}$, et enfin $I_n = \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{\varepsilon(n)}{n^2}$, dont on déduit que $a = 0$; $b = 1$ et $c = -3$.

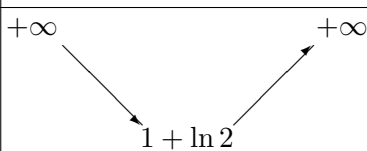
Exercice 2

1. La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme et produit de fonctions usuelles. Le seul problème se pose en 0. Or, $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$. On peut donc bien prolonger f par continuité sur $\mathbb{R}^+$ en posant $f(0) = -1$.
2. Le fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $f'(x) = 2x - \ln x - 1$. Cette dérivée ayant une limite infinie en 0, on peut en déduire que la fonction f n'est donc pas dérivable en 0, mais y admet une tangente verticale.
3. Les fonctions f' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f''(x) = 2 - \frac{1}{x}$. Faisons donc un bon gros tableau de variations :

x	2
$f''(x)$	- 0 +
$f'(x)$	

La fonction f est donc concave sur $]0; 2]$ et convexe sur $[2; +\infty[$. De plus, comme $\ln 2$ est positif, f' sera positive sur $\mathbb{R}_+^*$, et f strictement croissante sur ce même intervalle. Enfin, par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

4. La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, avec pour limites -1 en 0, et $+\infty$ en $+\infty$, elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers $] - 1; +\infty[$.
5. D'après le théorème de la bijection, la fonction f^{-1} a même sens de variation que f , elle est strictement croissante sur $] - 1; +\infty[$. De plus, on aura $\lim_{x \rightarrow -1} f^{-1}(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) = +\infty$.
6. f est bijective vers $] - 1; +\infty[$ et, $\forall k \in \mathbb{N}$, on a $k \in] - 1; +\infty[$, donc k a un unique antécédent par f .
 - (a) On a $x_0 = 1$ puisque $f(1) = 0$ (il n'y a qu'à regarder le tableau de valeurs).
 - (b) La fonction f étant croissante, on a (toujours le tableau de valeurs) $1.5 < x_1 < 2 < x_2 < 2.5$.
 - (c) Plus généralement, $x_k = f^{-1}(k)$ donc, f^{-1} étant croissante (et $k < k+1$), on a $x_k < x_{k+1}$, c'est-à-dire que (x_k) est strictement croissante. Comme de plus $\lim_{k \rightarrow \infty} k = +\infty$ (c'est idiot, mais il faut le dire !) et $\lim_{k \rightarrow +\infty} f^{-1}(k) = +\infty$, on a $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = +\infty$.
7. (a) La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et $\varphi'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-2}{x^2}$. De plus $\varphi(x) = \frac{2+x \ln x}{x}$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = +\infty$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$. On a donc le tableau suivant :

x	0	2	$+\infty$
$\varphi'(x)$	-	0	+
$\varphi(x)$		$1 + \ln 2$	$+\infty$

- (b) La fonction φ étant strictement décroissante sur $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$, on aura $\forall x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$, $\varphi(2) \leq \varphi(x) \leq \varphi\left(\frac{3}{2}\right)$, donc $1.69 \leq \varphi\left(\frac{3}{2}\right) \leq 1.73$ et comme $\frac{3}{2} < 1.69$ et $1.73 < 2$, $\varphi\left(\left[\frac{3}{2}; 2\right]\right) \subset \left[\frac{3}{2}, 2\right]$.

(c) Dérivons une deuxième fois : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi''(x) = \frac{4}{x^3} - \frac{1}{x^2} = \frac{4-x}{x^3}$. La fonction φ' est donc croissante entre $\frac{3}{2}$ et 2. Comme $\varphi'\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{2}{9}$ et $\varphi'(2) = 0$, on en déduit que, $\forall x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$, $-\frac{2}{9} \leq \varphi'(x) \leq 0$, donc $|\varphi'(x)| \leq \frac{2}{9}$.

(d) $x = \varphi(x) \Leftrightarrow \frac{2}{x} + \ln x = x \Leftrightarrow 2 + x \ln x - x^2 = 0$ car x ne peut pas être nul. Or, $f(x) = 1 \Leftrightarrow x^2 - x \ln x - 1 = 1$; les deux équations sont bien équivalentes. La solution de l'équation $f(x) = 1$, qui est par définition x_1 , est donc également solution de $\varphi(x) = x$ (si vous préférez, x_1 est un point fixe de φ).

(e) La première inégalité se démontre par récurrence, posons $P_n : \frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$. Comme $u_0 = \frac{3}{2}$, la propriété P_0 est vérifiée, et en supposant P_n vérifiée, on a $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$, donc $\frac{3}{2} \leq \varphi(u_n) \leq 2$ d'après la question b., donc P_{n+1} est vérifiée et la récurrence est prouvée.

La deuxième étape est une application de l'inégalité des accroissements finis : $u_n \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$, $x_1 \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$ d'après la question 6. et sur $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$, on a $|\varphi'(x)| \leq \frac{2}{9}$, donc $|\varphi(u_n) - \varphi(x_1)| \leq \frac{2}{9} |u_n - x_1|$. Comme $\varphi(x_1) = x_1$ et $\varphi(u_n) = u_{n+1}$, on obtient l'inégalité souhaitée.

La dernière inégalité se démontre à nouveau par récurrence. Posons $P_n : |u_n - x_1| \leq \left(\frac{2}{9}\right)^n$. Pour prouver P_0 , il faut vérifier que $\left|\frac{3}{2} - x_1\right| \leq 1$, ce qui est vrai car $x_1 \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$.

Ensuite, on suppose P_n vérifiée, et on a alors $|u_{n+1} - x_1| \leq \frac{2}{9} |u_n - x_1| \leq \frac{2}{9} \times \left(\frac{2}{9}\right)^n \leq \left(\frac{2}{9}\right)^{n+1}$. La récurrence est prouvée.

(f) On a $0 \leq |u_n - x_1| \leq \left(\frac{2}{9}\right)^n$. Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{9}\right)^n = 0$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n - x_1 = 0$, c'est-à-dire que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x_1$.

Exercice 3

3.1 Encadrement des racines de l'équation caractéristique.

1. L'équation $f(x) = 0$ a pour discriminant $\Delta = q^2 + 4pq > 0$ (les réels p et q sont évidemment positifs, ce sont des probabilités!), donc l'équation admet effectivement deux racines, on peut toujours noter r_1 la plus petite et r_2 la plus grande. Comme on doit alors avoir $(x-r_1)(x-r_2) = x^2 - qx - qp$, on a $x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1r_2 = x^2 - qx - qp$, d'où par identification $r_1 + r_2 = q$ et $r_1r_2 = -qp$.
2. Calculons donc : $f(1) = 1 - q - pq = p - pq = p(1 - q) = p^2$; $f(-1) = 1 + q - qp = 1 + q(1 - p) = 1 + q^2$; et $f(0) = -pq$.
3. Comme $f(0) < 0$ tandis que $f(1) > 0$ et $f(-1) > 0$, le théorème des valeurs intermédiaires nous assure que f s'annule sur $] -1; 0[$ et sur $] 0; 1[$. Comme on sait par ailleurs qu'elle s'annule exactement deux fois en r_1 et en r_2 , on a donc $-1 < r_1 < 0$ et $0 < r_2 < 1$. En découle que $|r_1| < 1$ et $|r_2| < 1$. Pour prouver que $|r_1| < |r_2|$, il suffit de constater que ces deux nombres sont de signes opposés mais que leur somme est strictement positive (elle vaut q , on l'a calculée juste au-dessus).

3.2 Équivalent de a_n quand n tend vers l'infini.

1. L'évènement A_1 signifie qu'on tire deux Piles aux deux premiers lancers, donc $a_1 = p^2$. L'évènement A_2 est réalisé si et seulement si on commence avec un Face, puis on poursuit avec deux Piles (si on avait un Pile au premier tirage, la première succession de deux Piles apparaîtrait avant les tirages 2 et 3), donc $a_2 = qp^2$. Enfin, pour que A_3 soit vérifié, on peut avoir les successions PFPP et FFPP sur les quatre premiers tirages (Face au deuxième lancer imposé comme ci-dessus, et peu importe ce qui se passe au premier), ce qui donne $a_3 = a_2 = qp^2$.
2. En effet, si on veut que A_{n+2} soit réalisé (pour $n \geq 1$), il ne faut pas commencer par deux Piles. Si on commence avec un Face, on peut oublier ce premier tirage et on attend que le premier PP apparaisse sur les $n + 1$ tirages restant, ce qui a pour probabilité a_{n+1} . Si on commence avec un Pile, il faut donc un Face au deuxième tirage, et on peut alors oublier ces deux tirages et attendre le premier PP sur les n tirages restants. Ces deux situations étant incompatibles, on aura $a_{n+2} = P(F_1) \times a_{n+1} + P(P_1 F_2) \times a_n = qa_{n+1} + pqa_n$. Si $n = 0$, on constate tout simplement que $qa_1 + pqa_0 = qp^2 = a_2$, la formule est donc toujours valable. La relation demandée en découle immédiatement.

```

3. PROGRAM calculan ;
   USES wincrt ;
   VAR a,b,t,p : real ; i,n : integer ;
   BEGIN
     WriteLn('Choisissez la valeur de p') ;
     ReadLn(p) ;
     q := 1-p ;
     WriteLn('Choisissez la valeur de n') ;
     ReadLn(n) ;
     IF n=0 THEN WriteLn('a0=0') ELSE
     BEGIN
       a := p*p ; b := 0 ;
       FOR i := 2 To n DO
         BEGIN
           t := q*b-p*q*a ;
           b := a ;
           a := t ;
         END ;
       WriteLn('an=',a) ;
     END ;
   END.

```

4. La suite (a_n) est récurrente linéaire d'ordre 2, et on a déjà vu plus haut que son équation caractéristique admettait r_1 et r_2 pour racines. On a donc $a_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$, avec $a_0 = \alpha + \beta = 0$ et $a_1 = \alpha r_1 + \beta r_2 = p^2$, donc $\beta = -\alpha$ et $p^2 = \alpha(r_1 - r_2)$. Cela donne bien $\alpha = \frac{p^2}{r_1 - r_2}$ et $\beta = -\frac{p^2}{r_1 - r_2}$, et la formule demandée. On peut aussi prouver la formule par récurrence...
5. On a vu plus haut que $|r_1| < |r_2|$, donc $r_1^n = o(r_2^n)$, et $a_n \sim \frac{p^2 r_2^n}{r_2 - r_1}$ (notez au passage que cette probabilité tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, ce qui n'a rien de surprenant).

3.3 Expression de a_n en fonction de n par une méthode matricielle.

1. Calculons donc $AX_n = \begin{pmatrix} (r_1 + r_2)a_{n+1} - r_1r_2a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$. Mais on a vu plus haut que $(r_1 + r_2) = q$ et $r_1r_2 = -pq$, donc le premier terme de AX_n vaut $qa_{n+1} + pqa_n$, qui vaut a_{n+2} d'après la question 3.2.2. Finalement, $AX_n = \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$.
2. Constatons que $A - r_1I = \begin{pmatrix} r_2 & -r_1r_2 \\ 1 & -r_1 \end{pmatrix}$, et que sur cette matrice, $L_1 - r_2L_2$ donne la ligne nulle, ce qui empêche d'inverser la matrice. De même, $A - r_2I = \begin{pmatrix} r_1 & -r_1r_2 \\ 1 & -r_2 \end{pmatrix}$, et cette fois-ci c'est $L_1 - r_1L_2$ qui s'annule, avec la même conclusion.
3. On oublie cette question, hors de notre portée pour l'instant.
4. Appliquons donc le pivot de Gauss à la matrice P : la combinaison $L_2 \leftarrow L_1 - r_1L_2$ transforme la matrice P en $\begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 0 & r_2 - r_1 \end{pmatrix}$, puis la combinaison $L_1 \leftarrow (r_1 - r_2)L_1 + r_2L_2$ donne la matrice diagonale $\begin{pmatrix} r_1(r_1 - r_2) & 0 \\ 0 & r_2 - r_1 \end{pmatrix}$. Il ne reste plus qu'à diviser les lignes respectivement par $r_1(r_1 - r_2)$ et $r_2 - r_1$ pour obtenir l'identité (ça ne pose aucun problème, on sait que tous ces nombres sont non nuls). Les opérations effectuées en parallèle sur l'identité donnent $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -r_1 \end{pmatrix}$, puis $\begin{pmatrix} r_1 & -r_1r_2 \\ 1 & -r_1 \end{pmatrix}$, et enfin $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r_1 - r_2} & \frac{r_2}{r_1 - r_2} \\ \frac{1}{r_2 - r_1} & \frac{r_1}{r_1 - r_2} \end{pmatrix} = \frac{1}{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & -r_2 \\ -1 & r_1 \end{pmatrix}$.
5. On calcule donc $AP = \begin{pmatrix} r_1^2 & r_2^2 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix}$ puis $P^{-1}AP = \frac{1}{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} r_1^2 - r_1r_2 & 0 \\ 0 & r_1r_2 - r_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$.
6. Faisons donc, puisqu'on nous le propose si gentiment, une jolie récurrence. Pour $n = 0$, c'est clair : $PD^0P^{-1}X_0 = PP^{-1}X_0 = X_0$. Et si on suppose la relation vérifiée au rang n , alors $X_{n+1} = AX_n = APD^nP^{-1}X_0$, avec $A = PDP^{-1}$ (il suffit de multiplier à gauche par P et à droite par P^{-1} la relation de la question précédente). Donc $X_{n+1} = PDP^{-1}PD^nP^{-1}X_0 = PDD^nP^{-1}X_0 = PD^{n+1}P^{-1}X_0$, ce qui prouve l'hérédité et achève la récurrence.
7. Encore un peu de calcul : $D^n = \begin{pmatrix} r_1^n & 0 \\ 0 & r_2^n \end{pmatrix}$, puis $PD^n = \begin{pmatrix} r_1^{n+1} & r_2^{n+1} \\ r_1^n & r_2^n \end{pmatrix}$, puis $PD^nP^{-1} = \frac{1}{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} r_1^{n+1} - r_2^{n+1} & r_2^{n+1}r_1 - r_2r_1^{n+1} \\ r_1^n - r_2^n & r_1r_2^n - r_2r_1^n \end{pmatrix}$. Comme $X_0 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^2 \\ 0 \end{pmatrix}$, on obtient finalement $X_n = \frac{1}{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} p^2(r_1^{n+1} - r_2^{n+1}) \\ p^2(r_1^n - r_2^n) \end{pmatrix}$. On retrouve bien pour a_n (et accessoirement pour a_{n+1}) la formule trouvée à la question 3.2.4.

3.4 Étude du temps d'attente du premier double pile.

1. Calculons donc $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \frac{p^2}{r_2 - r_1} \sum_{n=1}^{+\infty} r_2^n - r_1^n$. Cette somme est bien convergente puisque les raisons des séries géométriques ont une valeur absolue strictement inférieure à 1, et la somme vaut $\frac{p^2}{r_2 - r_1} \left(\frac{1}{1 - r_2} - 1 - \frac{1}{1 - r_1} - 1 \right) = \frac{p^2}{r_2 - r_1} \times \frac{r_2 - r_1}{(1 - r_2)(1 - r_1)} = \frac{p^2}{1 - (r_1 + r_2) + r_1r_2} = \frac{p^2}{1 - q - pq} = \frac{p^2}{p(1 - q)} = \frac{p^2}{p^2} = 1$, donc ça marche.
2. Sous réserve de convergence, $E(T) = \sum_{n=1}^{+\infty} (n + 1)a_n = \frac{p^2}{r_2 - r_1} \sum_{n=1}^{+\infty} (n + 1)r_2^n - (n + 1)r_1^n$. On reconnaît des séries géométriques dérivées convergentes (il manque juste le premier terme), et

$$E(T) = \frac{p^2}{r_2 - r_1} \left(\frac{1}{(1 - r_2)^2} - 1 - \frac{1}{(1 - r_1)^2} + 1 \right) = \frac{p^2}{r_2 - r_1} \times \frac{(1 - r_1)^2 - (1 - r_2)^2}{p^4},$$
 en remplaçant $(1 - r_1)(1 - r_2)$ par p^2 au vu du calcul effectué à la question précédente. Le deuxième numérateur vaut $1 - 2r_1 + r_1^2 - 1 + 2r_2 - r_2^2 = (r_1 + r_2)(r_1 - r_2) + 2(r_2 - r_1) = (r_2 - r_1)(2 - q) = (r_2 - r_1)(1 + p)$. Après simplification, $E(T) = \frac{1 + p}{p^2}$.