Ecricome 2005

ECE3 Lycée Carnot

3 mai 2011

Note : L'énoncé initial a été scrupuleusement respecté, à l'exception de la deuxième partie de l'exercice 2, consacrée aux fonctions à deux variables, qui a été supprimée. La question 3.3.3 a été maintenue dans l'énoncé mais pas traitée lors de la résolution.

Exercice 1

On considère, pour tout entier naturel n, l'application φ_n, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_n(x) = (1-x)^n e^{-2x}$$

ainsi que l'intégrale : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \varphi_n(x)dx$.
On se propose de démontrer l'existence de trois réels, a, b, c tels que

$$I_n = a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + \frac{\varepsilon(n)}{n^2} \quad \text{avec} \quad : \lim_{n \to +\infty} \varepsilon(n) = 0.$$

1. Calculer I_0, I_1.
2. Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Déterminer le signe de I_n pour tout entier naturel n.
4. Qu'en déduit-on pour la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
5. Majorer la fonction $g : x \mapsto e^{-2x}$ sur $[0;1]$.
6. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
7. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
8. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$.
9. En déduire la limite de la suite $(nI_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
10. Déterminer la limite de la suite $(n(nI_n - 1))_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
11. Donner alors les valeurs de a, b, c.

Exercice 2

On considère la fonction f définie par

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+^\times, & f(x) = & x^2 - x\ln(x) - 1 \\ & f(0) = & -1 \end{cases}$$

le tableau de valeurs de f,

$x =$	$0,5$	1	$1,5$	2	$2,5$	3	$3,5$	4
$f(x) \simeq$	$-0,4$	0	$0,6$	$1,6$	3	$4,7$	$6,9$	$9,5$

ainsi que la fonction φ définie par :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^\times$, $\varphi(x) = \dfrac{2}{x} + \ln(x)$.

2.1 Étude de deux suites associées à f.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Étudier la dérivabilité de la fonction f en 0. En donner une interprétation graphique.
3. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}_+^\times$, puis dresser son tableau de variations en précisant la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers l'infini.
4. Étudier la nature de la branche infinie.
5. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^\times$ sur un intervalle J que l'on précisera.
6. Quel est le sens de variation de f^{-1} ? Déterminer la limite de $f^{-1}(x)$ lorsque x tend vers l'infini.
7. Justifier que pour tout entier naturel k, il existe un unique réel x_k positif tel que $f(x_k) = k$.
   (a) Donner la valeur de x_0.
   (b) Utiliser le tableau de valeurs de f pour déterminer un encadrement de x_1 et x_2.
   (c) Exprimer x_k à l'aide de f^{-1} puis justifier que la suite (x_k) est croissante et déterminer sa limite lorsque k tend vers l'infini.
8. On définit la suite (u_n) par : $\begin{cases} & u_0 & = & \dfrac{3}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+1} & = & \varphi(u_n) \end{cases}$
   (a) Étudier les variations de φ sur $\mathbb{R}_+^\times$.
   (b) On donne $\varphi\left(\dfrac{3}{2}\right) \simeq 1,73$ et $\varphi(2) \simeq 1,69$. Montrer que $\varphi\left(\left[\dfrac{3}{2}; 2\right]\right) \subset \left[\dfrac{3}{2}; 2\right]$.
   (c) En étudiant les variations de φ', montrer que : $\forall x \in \left[\dfrac{3}{2}; 2\right]$, $|\varphi'(x)| \leqslant \dfrac{2}{9}$.
   (d) Montrer que les équations $x = \varphi(x)$ et $f(x) = 1$ sont équivalentes. En déduire que le réel x_1 est l'unique solution de l'équation $x = \varphi(x)$.
   (e) Montrer successivement que pour tout entier n :
   $$\frac{3}{2} \leqslant u_n \leqslant 2 \quad ; \quad |u_{n+1} - x_1| \leqslant \frac{2}{9}\,|u_n - x_1| \quad ; \quad |u_n - x_1| \leqslant \left(\frac{2}{9}\right)^n.$$
   (f) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 3

On effectue une suite de lancers d'une pièce de monnaie. On suppose que les résultats des lancers sont indépendants et qu'à chaque lancer, la pièce donne pile avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ et face avec la probabilité $q = 1 - p$.
On s'intéresse dans cet exercice à l'apparition de deux piles consécutifs.
Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement « deux piles consécutifs sont réalisés pour la première fois aux lancers numéro n et $n + 1$ ».
On définit alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des probabilités des événements A_n par :

- Pour tout entier naturel n non nul : $a_n = P(A_n)$
- avec la convention $a_0 = 0$.

3.1 Encadrement des racines de l'équation caractéristique.

On considère la fonction polynomiale f de la variable réelle x définie par $f(x) = x^2 - qx - pq$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 avec $r_1 < r_2$. Exprimer $r_1 + r_2$ et $r_1 \times r_2$ en fonction de p et q.
2. Calculer $f(1)$, $f(-1)$, $f(0)$.
3. En déduire l'encadrement suivant : $|r_1| < |r_2| < 1$.

3.2 Équivalent de a_n quand n tend vers l'infini.

1. Déterminer a_1, a_2 et a_3 en fonction de p et q.
2. En remarquant que l'événement A_{n+2} est réalisé si et seulement si :
   - on a obtenu pile au premier tirage, face au deuxième tirage, et à partir de ce moment, A_n est réalisé.

   ou
   - on a obtenu face au premier tirage, et à partir de ce moment, A_{n+1} est réalisé.

   Montrer que l'on a, pour tout entier naturel n : $a_{n+2} - qa_{n+1} - pqa_n = 0$.
3. Écrire un programme, en langage Pascal, permettant de calculer a_n, l'entier n, les réel p et q étant donnés par l'utilisateur.
4. Montrer que pour tout entier naturel n, $a_n = \dfrac{p^2}{r_2 - r_1}((r_2)^n - (r_1)^n)$.
5. Donner un équivalent de a_n lorsque n tend vers plus l'infini.

3.3 Expression de a_n en fonction de n par une méthode matricielle.

On définit les matrices A et P par :

$$A = \begin{pmatrix} r_1 + r_2 & -r_1r_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad P = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

ainsi que les matrices unicolonnes X_n tout entier naturel n, par : $X_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que pour tout entier naturel n : $X_{n+1} = AX_n$.
2. Montrer que les matrices $A - r_1I$ et $A - r_2I$ ne sont pas inversibles.
3. En déduire que A est diagonalisable.
4. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
5. Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$. (Les coefficients de la matrice D seront exprimés en fonction de $r_1$et $r_2$seulement).
6. Démontrer par récurrence, que pour tout entier naturel n, $X_n = PD^nP^{-1}X_0$.
7. Retrouver ainsi l'expression de a_n en fonction de r_1, r_2, p et n.

3.4 Étude du temps d'attente du premier double pile.

On désigne par T l'application associant à toute suite de lancers successifs le numéro du lancer où pour la première fois on obtient un double pile. Ainsi, pour tout entier naturel n, $P(T = n+1) = a_n$.

1. Montrer que T est une variable aléatoire, c'est-à-dire que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(T = n+1) = 1$.
2. Prouver que T admet une espérance $E(T)$, et que : $E(T) = \dfrac{1+p}{p^2}$.