Chapitre 14 : Dérivation

ECE3 Lycée Carnot

4 mars 2011

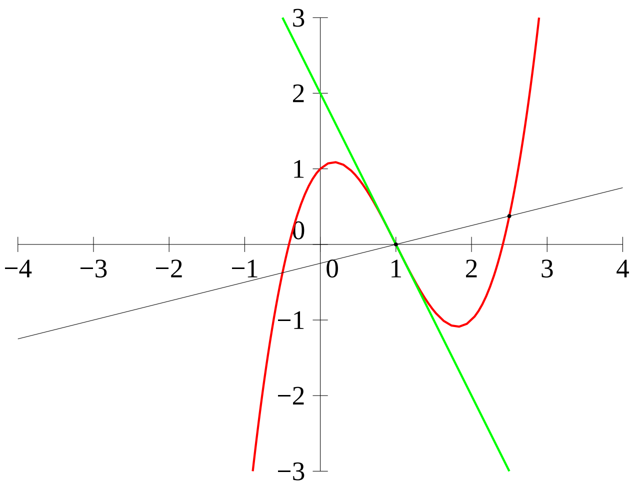
1 Définitions et formulaire

1.1 Aspect graphique

L'idée cachée derrière le calcul de dérivées, que vous utilisez déjà depuis plusieurs années pour étudier les variations de fonctions, est en gros le suivant : les seules fonctions dont le sens de variation est réellement facile à déterminer sont les fonctions affines, pour lesquelles il est simplement donné par le signe du coefficient directeur de la droite représentant la fonction affine. Pour des fonctions plus complexes, on va donc chercher à se ramener au cas d'une droite en cherchant, pour chaque point de la courbe, la droite « la plus proche » de la courbe autour de ce point. C'est ainsi qu'est née la notion de tangente, à laquelle celle de dérivée est intimement liée. Plus précisément :

Définition 1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x \in I$, le **taux d'accroissement de f en x** est la fonction définie par $\tau_x(h) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Remarque 1. Le taux d'accroissement n'est pas défini en 0. Pour $h \neq 0$, $\tau_x(h)$ représente le coefficient directeur de la droite passant par les points d'abscisse x et $x + h$ de la courbe représentative de f (droite noire dans le graphique ci-dessous, où $a = 1$ et $h = 1.5$).



Définition 2. Une fonction f est **dérivable** en x si son taux d'accroissement en x admet une limite quand h tend vers 0. On appelle alors nombre dérivé de f en x cette limite et on la note $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Remarque 2. En reprenant l'interprétation géométrique précédente, la droite tracée se rapproche quand h tend vers 0 de la tangente à la courbe représentative de f au point de la courbe d'abscisse a. Le nombre dérivé de f en x est donc le coefficient directeur de cette tangente, tracée en vert sur le graphique.

Remarque 3. Pour des raisons pratiques, on aura parfois besoin pour certains calculs d'une définition légèrement différente du nombre dérivé : $f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$, qui est équivalente à la précédénte (en posant $h = y - x$, on se ramène en effet à notre première définition).

Exemples :

- Considérons $f(x) = x^2$ et calculons à l'aide de cette définition la dérivée (ou plutôt pour l'instant le nombre dérivé au point d'abscisse x) de f. Le taux d'accroissement de la fonction carré en x vaut $\tau_x(h) = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{x^2 + 2hx + h^2 - 1}{h} = 2x + h$. Ce taux d'accroissement a une limite égale à $2x$ quand h tend vers 0, donc f est dérivable en x et $f'(x) = 2x$ (ce qui correspond bien à la formule que vous connaissez).
- Considérons à présent $g(x) = \sqrt{x}$, le taux d'accroissement de g en x vaut $\tau_x(h) = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{x + h - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$. Si $x \neq 0$, ce taux d'accroissement a pour limite $\frac{1}{2\sqrt{x}}$, ce qui correspond une nouvelle fois à une formule bien connue. Par contre, $\lim_{h \to 0} \tau_0(h) = +\infty$, ce qui prouve que la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0. On a tout de même une interprétation graphique intéressante dans ce cas : la courbe représentative de la fonction racine carrée admet en son point d'abscisse 0 une tangente verticale.

Définition 3. La fonction f est **dérivable à gauche** en x si son taux d'accroissement admet une limite quand h tend vers 0^-. On note alors $f'_g(x) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. De même, f est **dérivable à droite** en x si $\tau_x(h)$ admet une limite en 0^+ et on note $f'_d(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Remarque 4. La fonction f est dérivable en x si et seulement si elle y est dérivable à gauche et à droite et que $f'_d(x) = f'_g(x)$.

Définition 4. Dans le cas où $f'_g(x) \neq f'_d(x)$ (ou si une seule des deux limites existe) on dit que la courbe de f admet une (ou deux) **demi-tangente à droite ou à gauche**. Si $\tau_x(h)$ admet une limite infinie en 0^+ ou en 0^-, on dit que la courbe de f admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse x.

Exemple : Considérons $f(x) = |x|$ et $x = 0$. On a donc $\tau_0(h) = \frac{|h|}{h}$. Si $h > 0$, $\tau_0(h) = \frac{h}{h} = 1$, donc $f'd(0) = 1$; mais si $h < 0$, $\tau_0(h) = \frac{-h}{h} = -1$, donc $f'g(h) = -1$. La fonction valeur absolue n'est donc pas dérivable en 0, mais y admet à gauche une demi-tangente d'équation $y = -x$, et à droite une demi-tangente d'équation $y = x$ (qui sont d'ailleurs confondues avec la courbe).

Définition 5. Une fonction f est **dérivable sur un intervalle** I si elle est dérivable en tout point de I. On appelle alors **fonction dérivée** de f la fonction $f : x \mapsto f'(x)$.

Proposition 1. Soit f une fonction dérivable en a, alors l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en a est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Démonstration. La tangente est une droite de coefficient directeur $f'(a)$ donc son équation peut se mettre sous la forme $y = f'(a)x + b$, avec $b \in \mathbb{R}$. Pour déterminer b, il suffit de constater que le point $(a; f(a))$ appartient à la tangente (qui coupe $\mathcal{C}_f$ en ce point), donc on doit avoir $f(a) = af'(a) + b$, soit $b = f(a) - af'(a)$. L'équation est donc $y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a = f'(a)(x - a) + f(a)$. $\square$

Proposition 2. Si une fonction f est dérivable en x, alors f est continue en x.

Remarque 5. La réciproque est fausse ! Par exemple la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ mais pas dérivable en 0.

Proposition 3. Si f est dérivable en x, on sait que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$. Autrement dit, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\underset{0}{=}f'(x)+o(1)$. En multipliant tout par h, on obtient $f(x+h)-f(x)=hf'(x)+o(h)$. Comme $\lim\limits_{h\to 0}f(x)+hf'(x)+o(h)=f(x)$, on a donc $\lim\limits_{h\to 0}f(x+h)=f(x)$, ce qui prouve que f est continue en x.

Définition 6. On appelle **développement limité à l'ordre** 1 de f en a l'égalité $f(x+h)\underset{0}{=}f(x)+hf'(x)+o(h)$.

Remarque 6. Cette égalité signifie simplement que, lorsque h est proche de 0, $f(x+h)$ peut être approché par $f(x)+hf'(x)$, qui n'est autre que la valeur prise par la tangente au point d'abscisse $x+h$. On parle d'ordre 1 car on approche f par une fonction qui est un polynome de degré 1. On peut généraliser cette notion en approchant la fonction f par un polynome de degré 2, 3 ou plus (mais il faut alors que f soit deux, trois fois dérivable, etc). On parle alors de développement limité à l'ordre 2, 3, etc., notion que vous étudierez plus intensivement l'an prochain.

1.2 Opérations

Proposition 4. Soient f et g deux fonctions dérivables en x. Alors $f+g$ est dérivable en x et $(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$.

Démonstration. En effet, le taux d'accroissement de $f+g$ en x vaut $\tau_x(h)=\dfrac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h}=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}+\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$. Autrement dit, c'est la somme des taux d'accroissements de f et de g en x. Sa limite existe donc et est égale à la somme des limites de ces taux d'accroissement, c'est-à-dire que $\lim\limits_{h\to 0}\tau_x(h)=f'(x)+g'(x)$, d'où la formule. □

Proposition 5. Soient f et g deux fonction dérivables en x, alors fg est dérivable en x et $(fg)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.

Démonstration. Calculons le taux d'accroissement de la fonction fg en x :
$\tau_x(h)=\dfrac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}=\dfrac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}=$ $g(x+h)\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}+f(x)\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$. Le premier terme a pour limite $g(x)f'(x)$ quand h tend vers 0 (la fonction g étant dérivable donc continue, $g(x+h)$ tend vers $g(x)$ et le reste est le taux d'accroissement de f en x), et le second a pour limite $f(x)g'(x)$ puisqu'on reconnait le taux d'accroissement de g. On obtient donc bien la formule attendue. □

Exemple : La fonction $x\mapsto x\ln x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et a pour dérivée $\ln x+x\times\dfrac{1}{x}=\ln x+1$. Ce résultat nous sera surtout utile dans l'autre sens : on en déduit qu'une primitive de la fonction ln est la fonction $x\mapsto x\ln x-x$.

Proposition 6. Soit g une fonction dérivable en x, et ne s'annulant pas en x, alors $\dfrac{1}{g}$ est dérivable en x et $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(x)=-\dfrac{g'(x)}{g(x)^2}$. Si f est une autre fonction dérivable en x, alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en x et $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$.

Démonstration. Le taux d'accroissement de $\dfrac{1}{g}$ en x vaut $\tau_a(x)=\dfrac{\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}}{h}$. Il n'est défini que si $g(x+h)\neq 0$, mais on admettra que, si $g(x)\neq 0$ (c'est une des hypothèses de la proposition) et g est continue, alors g ne s'annule pas au voisinage de x. On peut alors réduire au même dénominateur :

$\tau_x(h) = \dfrac{1}{g(x+h)g(x)} \dfrac{g(x)-g(x+h)}{h}$. On reconnait à droite l'opposé du taux d'accroissement de g, qui tend donc vers $-g'(a)$, et le dénominateur à gauche tend vers $g(x)^2$ car g est dérivable donc continue en a.
La deuxième formule s'obtient en appliquant simplement la formule de dérivation d'un produit à f et $\dfrac{1}{g}$: $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = f'(x) \times \dfrac{1}{g(x)} - f(x) \times \dfrac{g'(x)}{g(x)^2} = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$. □

Exemple : La formule de dérivation du quotient est notamment très utile pour dériver les fonctions rationnelles, par exemple $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+1}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$f'(x) = \frac{2(x^2+1)-2x(2x+3)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2-6x+2}{(x^2+1)^2}.$$

Proposition 7. Soit f une fonction dérivable et bijective sur un intervalle I, à valeurs dans J. Alors f^{-1} est dérivable en tout point $y \in J$ tel que $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$, et dans ce cas $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

Remarque 7. Les images des valeurs où la dérivée de f s'annule, qui sont donc les points où la fonction réciproque n'est pas dérivable, correspondant en fait à des endroits où la courbe de f^{-1} admet des tangentes verticales (ce qui se comprend graphiquement puisqu'une tangente horizontale pour f devient après symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$ une tangente verticale pour f^{-1}).

Démonstration. Soit $y \in J$ et $x = f^{-1}(y)$. La taux d'accroissement de f^{-1} en y est $\tau_y(h) = \dfrac{f^{-1}(y+h)-f^{-1}(y)}{h} = \dfrac{f^{-1}(y+h)-x}{h}$. La fonction f étant bijective de I sur J, $y+h$ admet un unique antécédent b sur I. On a donc $f(b) = y+h$ et par ailleurs $f(x) = y$, donc $h = (y+h)-y = f(b)-f(x)$ et $\tau_y(h) = \dfrac{b-x}{f(b)-f(x)}$. En posant $h' = b-x$, on a $\tau_y(h) = \dfrac{h'}{f(x+h')-f(x)}$, avec h' qui tend vers 0 quand h tend vers 0 car la fonction f^{-1} est continue, donc $b = f^{-1}(y+h)$ tend vers $f^{-1}(y) = x$. On reconnait donc la limite quand h tend vers 0 de l'inverse du taux d'accroissement de f en x. Si $f'(x) \neq 0$, on a donc $\lim\limits_{h \to 0} \tau_y(h) = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$. Si $f'(x) = 0$, la limite de $\tau_y(h)$ est infinie, on a donc une tangente verticale. □

Proposition 8. Soient f et g deux fonction dérivables respectivement en x et en $f(x)$, alors la composée $g \circ f$ est dérivable en x et $(g \circ f)'(x) = f'(x).(g'(f(x))$.

Démonstration. L'idée est de séparer le taux d'accroissement de $g \circ f$ pour faire apparaitre ceux de g et de f de la façon suivante : $\dfrac{g \circ f(y) - g \circ f(x)}{y-x} = \dfrac{g \circ f(y) - g \circ f(x)}{f(y)-f(x)} \times \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Le premier quotient est le taux d'accroissement de g en $f(x)$, il converge donc vers $g'(f(x))$. Le second est le taux d'accroissement de f en x, qui converge vers x. On en déduit la formule.
Il y a en fait un (gros) problème, c'est que le premier dénominateur à droite peut très bien s'annuler (quand $f(y) = f(x)$) et (contrairement à ce qui se passait pour l'inverse) cela peut se produire aussi près de x que voulu. Une autre façon (correcte, celle-ci) de prouver cette propriété est de passer par les développements limités à l'ordre 1. On sait que $f(x+h) \underset{0}{=} f(x) + hf'(x) + o(h)$, et que $g(y+k) \underset{0}{=} g(y) + kg'(y) + o(k)$. On en déduit que $g \circ f(x+h) = g(f(x) + hf'(x) + o(h))$. En prenant $y = f(x)$ et $k = hf'(x) + o(h)$ (ce qui tend bien vers 0 quand h tend vers 0), on a donc $g \circ f(x+h) = g(f(x)) + (hf'(x)+o(h))g'(f(x)) + o(hf'(x)+o(h)) = g \circ f(x) + hf'(x)g' \circ f(x) + o(h)$ (tout les termes restants sont effectivement négligeables devant h). Comme on sait par ailleurs que $g \circ f(x+h) = g \circ f(x) + h(g \circ f)'(x) + o(h)$, une simple identification donne $(g \circ f)'(x) = f'(x)g' \circ f(x)$. □

Exemples : La fonction $x \mapsto (2x+3)^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $2 \times 3(2x+3)^2 = 6 \times (2x+3)^2$.
La fonction $x \mapsto e^{x^2+2x-4}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $2(x+1)e^{x^2+2x-4}$.

Remarque 8. Les dérivées de composées que nous utiliserons le plus souvent sont les suivantes (u étant une fonction dérivable quelconque) :

- $(e^u)' = u'e^u$.
- $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$
- $(u^n)' = nu'u^{n-1}$
- $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

1.3 Dérivées de fonctions usuelles

Les quelques dérivées classiques sur lesquelles il ne faut vraiment pas hésiter :

fonction	dérivée	$\mathcal{D}_f$	condition
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$ **ou** $\mathbb{R}^*$	$n \in \mathbb{Z}^*$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	
e^x	e^x	$\mathbb{R}$	
x^a	ax^{a-1}	$\mathbb{R}_+^*$	$a \in \mathbb{R}$

Pour la première ligne, le domaine de définition et de dérivabilité est $\mathbb{R}$ si $n < 0$, et $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$.

Démonstration. Commençons par traiter par récurrence le cas des puissances entières positives. Notons $f_n(x) = x^n$, et prouvons par récurrence la propriété P_n : f_n est dérivable et $f_n'(x) = nx^{n-1}$. Pour $n = 1$, $f_1(x) = x$, le taux d'accroissement de f en x est $\tau_x(h) = \dfrac{x+h-x}{h} = 1$, donc f est dérivable en tout point et $f'(x) = 1$, ce qui correspond bien à la formule et prouve P_1. Supposons désormais P_n vraie, on remarque alors que $f_{n+1} = f_1 \times f_n$, donc f_{n+1} est dérivable comme produit de fonctions dérivables, et en utilisant la formule de dérivation du produit et l'hypothèse de récurrence, $f_{n+1}'(x) = f_n(x) + f_1(x)f_n'(x) = x^n + x \times nx^{n-1} = x^n + nx^n = (n+1)x^n$, ce qui prouve P_{n+1} et achève la récurrence.

On en déduit ensuite les dérivées des puissances entières négatives en utilisant la formule de dérivation d'un inverse. Soit $p < 0$ et $f_p(x) = x^p = \dfrac{1}{x^{-p}}$, avec $-p > 0$. On a donc $f_p'(x) = \dfrac{-(-p)x^{-p-1}}{(x^{-p})^2} = px^{p-1}$, ce qui est bien la formule annoncée. Un petit exemple pour la route : la dérivée de $\dfrac{1}{x^4}$ est $\dfrac{-4}{x^5}$.

Pour les dérivées de l'exponentielle et du logarithme, nous manquons d'une définition réellement rigoureuse de ces deux fonctions. On pourrait calculer la dérivée de l'une en fonction de celle de l'autre en utilisant la formule de dérivation d'une réciproque, mais nous nous contenterons de les admettre.

Enfin, pour les puissances quelconques, constatons que $x^a = e^{a \ln x}$, dont la dérivée vaut $\dfrac{a}{x}e^{a\ln x} = \dfrac{a}{x}x^a = ax^{a-1}$. □

2 Dérivées successives ; convexité

2.1 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ et $\mathcal{D}^k$

Définition 7. Une fonction est **de classe** $\mathcal{D}^n$ sur un intervalle I si elle est n fois dérivable sur I. On note alors $f^{(n)}$ sa dérivée n-ème (et on continue bien sûr à noter f', f'' et f''' pour les premières dérivées). Elle est **de classe** $\mathcal{C}^n$ sur I si de plus $f^{(n)}$ est continue sur I. On dit plus simplement que f est $\mathcal{D}^n$ ou $\mathcal{C}^n$ sur I.

Remarque 9. Une fonction $\mathcal{D}^n$ sur I est forcément $\mathcal{C}^{n-1}$ sur I puisqu'une fonction dérivable est nécessairement continue. Une fonction $\mathcal{C}^n$ est bien entendu $\mathcal{D}^n$. On a donc les implications suivantes : $\mathcal{C}^n \Rightarrow \mathcal{D}^n \Rightarrow \mathcal{C}^{n-1} \Rightarrow \mathcal{D}^{n-1} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \mathcal{C}^1 \Rightarrow \mathcal{D}^1 \Rightarrow \mathcal{C}^0$.

Définition 8. Une fonction est **de classe** $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I si elle y est dérivable n fois pour tout entier n.

Remarque 10. Toutes ses dérivées sont alors continues (puisqu'on peut toujours dériver une fois de plus), ce qui justifie qu'on ne distingue pas $\mathcal{D}^\infty$ et $\mathcal{C}^\infty$.

Proposition 9. La somme, le produit ou la composée de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, $\mathcal{D}^k$ ou $\mathcal{C}^\infty$ (sur les bons intervalles dans le cas de la composée) sont respectivement $\mathcal{C}^k$, $\mathcal{D}^k$ et $\mathcal{C}^\infty$.

Démonstration. Pour la somme, c'est une conséquence du fait que $\forall n \leqslant k$, $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$, ce qui se prouve par une récurrence facile (c'est vrai pour la première dérivée, et si c'est vrai au rang n il suffit de dériver une fois de plus pour obtenir le rang $n+1$). Pour le produit, cf le résultat suivant.
Pour la composée, on procède par récurrence : on sait que le résultat est vrai pour $k = 1$. Supposons le résultat vrai pour un entier n, et prenons deux fonctions g et f de classe $\mathcal{D}^{n+1}$. On a $(g \circ f)' = f'.g' \circ f$, or les fonctions f' et g' (et également f) sont de classe $\mathcal{D}^n$, donc en appliquant l'hypothèse de récurrence pour la composée et le résultat précédent pour le produit, $(g \circ f)'$ est de classe $\mathcal{D}^n$, donc $g \circ f$ de classe $\mathcal{D}^{n+1}$, ce qui achève la récurrence. □

Théorème 1. Formule de Leibniz.
Soient f et g deux fonctions $\mathcal{D}^n$ sur un intervalle I, alors $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.

Démonstration. Vous aurez bien sûr reconnu dans cette formule une grande similitude avec la formule du binôme de Newton. La formule de Leibniz se démontre de la même façon, c'est-à-dire par récurrence en utilisant la formule de Pascal. Comme nous n'avons pas démontré Newton en cours, nous passerons également sur Leibniz. □

Exemple : Pour $n = 4$, nous obtenons par exemple $(fg)^{(4)} = f^{(4)} + 4f'''g' + 6f''g'' + 4fg''' + g^{(4)}$.

Théorème 2. Toutes les fonctions usuelles sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur ensemble de dérivabilité (c'est-à-dire sur leur ensemble de définition, sauf pour la racine carrée qui ne sera $\mathcal{C}^\infty$ que sur $\mathbb{R}_+^*$).

Théorème 3. Théorème du prolongement $\mathcal{C}^1$.
Soit f une fonction continue sur un segment $[a;b]$, dérivable et $\mathcal{C}^1$ sur $]a;b]$. Si f' admet une limite finie l quand x tend vers a, alors f est dérivable en a et $f'(a) = l$.

Remarque 11. Ce théorème reste applicable si la limite de f' en a est infinie, on aura alors une tangente verticale en a. On utilisera ce théorème systématiquement quand on cherchera à étudier la dérivabilité d'une fonction aux bornes de son intervalle de définition, mais il est indispensable de commencer par faire un prolongement par continuité si la fonction n'est pas définie en ces bornes.

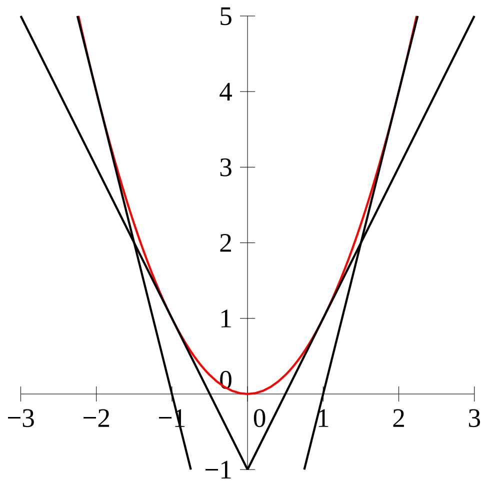
Exemple : $f(x) = x \ln x$. La fonction f est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$, de dérivée $f'(x) = \ln x + 1$. On sait par ailleurs qu'on peut la prolonger par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$. Comme $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = -\infty$, le prolongement n'est pas dérivable en 0, et la courbe y admet une tangente verticale (information très utile pour tracer la courbe).

2.2 Convexité

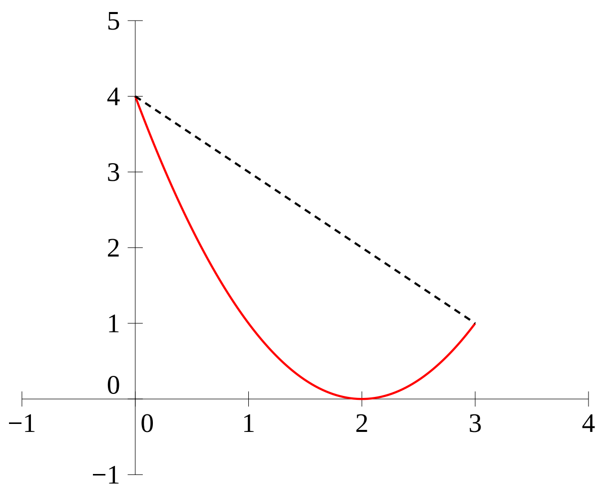
La convexité est une notion permettant d'affiner nos représentations géométriques de courbes en ayant une information supplémentaire sur leur forme générale. Elle s'étudie de façon similaire aux variations, mais nécessite en général un calcul de dérivée seconde.

Définition 9. Une fonction f définie sur un intervalle I est **convexe** sur I si sa courbe est située au-dessus de toutes ses tangentes sur cet intervalle. Elle est **concave** sur I si sa courbe est située en-dessous de toutes ses tangentes.

Exemple : La fonction carré est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$.



Remarque 12. Cette définition géométrique n'est en fait pas la « bonne » définition de la convexité, mais cette dernière est un peu technique. Je vous la donne en guise de complément : f est convexe sur I si $\forall (x, y) \in I^2$, $\forall t \in [0; 1]$, $f(tx+(1-t)y) \leqslant tf(x)+(1-t)f(y)$. De même, f est concave sur I si $\forall (x, y) \in I^2$, $\forall t \in [0; 1]$, $f(tx+(1-t)y) \geqslant tf(x)+(1-t)f(y)$. Que signifie tout ceci ? En fait, lorsque $t \in [0; 1]$, $tx + (1 - t)y$ prend toutes les valeurs comprises entre x et y. De même $tf(x) + (1 - t)f(y)$ prend toutes les valeurs comprises entre $f(x)$ et $f(y)$. L'inégalité de la définition signifie que tout point de la courbe situé entre les abscisses x et y est en-dessous (ou au-dessus dans le cas de la concavité) du point situé à la même abscisse sur la droite rejoignant les points $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$. Autrement dit, la courbe d'une fonction convexe est située en-dessous de toutes ses cordes. Celle d'une fonction concave est située au-dessus de ses cordes. Voici une illustration dans le cas convexe (la courbe rouge est en-dessous de la corde noire en pointillés) :



Proposition 10. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, alors f est convexe sur I si et seulement si son taux d'accroissement en tout point de I est une fonction croissante de h.

Démonstration. Supposons la fonction convexe sur I, et $a \in I$. Soient $0 < h < h'$ (les autres cas sont similaires), on a alors $a + h = ta + (1-t)(a+h')$ pour un certain $t \in [0;1]$, donc $f(a+h) \leqslant tf(a) + (1-t)f(a+h')$, d'où $f(a+h) - f(a) \leqslant tf(a) + (1-t)f(a+h') - f(a)$, soit $f(a+h) - f(a) \leqslant (1-t)(f(a+h') - f(a))$. Or, par définition, $(1-t)a+h = (1-t)(a+h')$, donc $1-t = \dfrac{h}{a+h'-a} = \dfrac{h}{h'}$. On obtient alors l'inégalité $f(a+h) - f(a) \leqslant \dfrac{h(f(a+h') - f(a))}{h'}$, soit en divisant par h, $\tau_a(h) \leqslant \tau_a(h')$, donc le taux d'accroissement en a est bien une fonction croissante. La réciproque se montre en utilisant le même type de calcul. □

Corollaire 1. Une fonction dérivable sur un intervalle I est convexe si et seulement si sa dérivée sur I est une fonction croissante. Elle y est convexe si et seulement si sa dérivée est décroissante sur I.

Démonstration. En effet, soient x et y deux réels appartenant à I. Posons $h = y - x$, on a $\tau_x(h) = \dfrac{f(y) - f(x)}{h} \geqslant f'(x)$ d'après la proposition précédente ; par ailleurs, $\tau_y(-h) = \dfrac{f(x) - f(y)}{-h} \leqslant f'(y)$. En combinant les deux inégalités, on obtient $f'(x) \leqslant f'(y)$. □

Corollaire 2. Soit f une fonction $\mathcal{D}^2$ sur un intervalle I, alors f est convexe si et seulement si f'' est positive sur I. De même, f est concave sur f si et seulement si f'' est négative sur I.

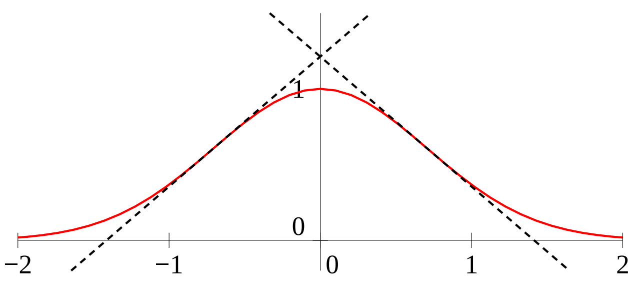
Démonstration. En effet, f' est croissante si f'' est positive (cf plus loin). □

Définition 10. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I, un **point d'inflexion** pour f est un réel pour lequel f'' change de signe.

Remarque 13. On a en particulier $f''(x) = 0$ en tout point d'inflexion, et c'est naturellement ainsi que l'on détermine les points d'inflexion. Il arrive toutefois qu'un réel vérifiant $f''(x) = 0$ ne soit pas point d'inflexion, tout comme un réel vérifiant $f'(x) = 0$ ne correspond pas toujours à un extremum.

Remarque 14. La fonction f change donc de concavité en chaque point d'inflexion. Une autre façon de voir les choses est que la tangente au point d'inflexion traverse la courbe représentative de f, particularité rare qui explique que le calcul des points d'inflexion améliore la précision du tracé de courbe. On tracera systématiquement les tangentes aux points d'inflexion à chaque fois que l'on étudiera la convexité d'une fonction.

Exemple : On cherche à tracer une courbe représentative la plus précise possible de la fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$. La fonction f est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Elle a des limites nulles en $\pm\infty$. Sa dérivée est $f'(x) = -2xe^{-x^2}$, donc f est croissante sur $]-\infty;0]$ et décroissante sur $[0;+\infty[$. De plus, sa dérivée seconde est $f''(x) = (-2+4x^2)e^{-x^2}$. La fonction f a donc deux points d'inflexion en $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et en $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. La fonction f est convexe entre ces deux points et concave le reste du temps, et les pentes des tangentes en ces deux points sont données par $f'\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} \simeq -0.86$ et $f'\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} \simeq 0.86$. La courbe représentative de f ressemble à ceci (les tangentes aux points d'inflexion sont aussi tracées) :



3 Inégalité des accroissements finis et applications

Le théorème des accroissements finis et l'inégalité du même nom (que je me permettrai d'abréger la plupart du temps par IAF) sont des outils fondamentaux en analyse, dont on verra deux des principales applications dans ce paragraphe.

3.1 Énoncés

Proposition 11. Soit f une fonction dérivable sur un segment $[a;b]$ et $x \in]a;b[$. Si x est un point en lequel f atteint un extremum local, alors $f'(x) = 0$.

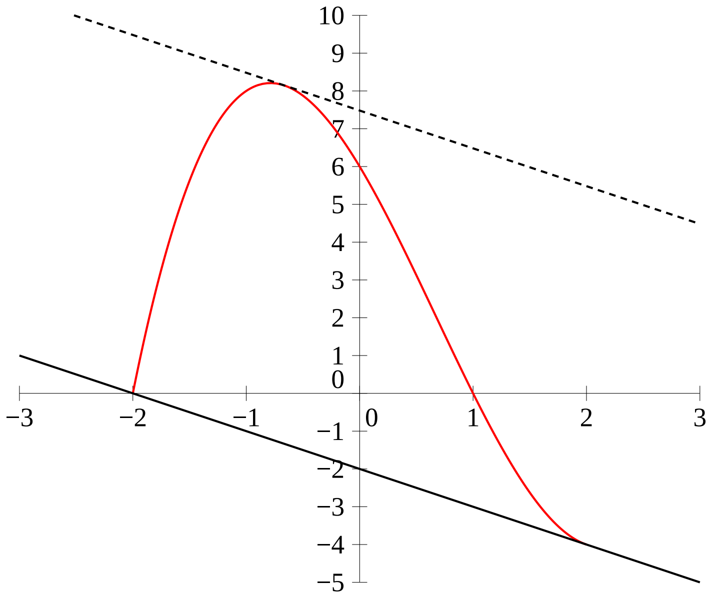
Démonstration. Supposons par exemple qu'il s'agisse d'un maximum (l'autre cas est très similaire). Le taux d'accroissement de f en x vaut $\tau_x(h) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$. On a au voisinage de x, $f(x+h) \leqslant f(x)$ puisque $f(x)$ est un maximum local. On en déduit que $\forall h < 0$ (et tel que $x+h$ appartienne au voisinage en question), $\tau_x(h) \geqslant 0$, donc $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0^-} \tau_x(h) \geqslant 0$. Mais de même $\forall h > 0$, $\tau_x(h) \leqslant 0$, donc $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0^-} \tau_x(h) \leqslant 0$. Finalement, on a nécessairement $f'(x) = 0$. □

Théorème 4. Théorème de Rolle.
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a;b]$, et telle que $f(a) = f(b)$, alors $\exists c \in]a;b[$, $f'(c) = 0$.

Démonstration. Commençons par éliminer le cas où la fonction f est constante sur $[a;b]$ puisque dans ce cas la dérivée de f est nulle, donc le théorème est manifestement vérifié.
La fonction f étant dérivable, elle est continue sur $[a;b]$, donc y atteint un maximum M et un minimum m. Si on suppose f non constante, l'un des deux, par exemple M (dans l'autre cas, la démonstration est similaire), est distinct de $f(a) = f(b)$, donc atteint en un réel $c \in]a;b[$. D'après la propriété précédente, $f'(c) = 0$. □

Théorème 5. Théorème des accroissements finis.
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a;b]$, alors $\exists c \in]a;b[$, $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Remarque 15. Autrement dit, il existe un point où la tangente est parallèle à la droite passant par les points $(a; f(a))$ et $(b; f(b))$.



Démonstration. Le principe est de se ramener au théorème précédent. Définissons une deuxième fonction g par $g(x) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x - f(x)$. Cette fonction est dérivable sur $[a;b]$ puisque f l'est et vérifie $g(b)-g(a) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}b - f(b) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}a + f(a) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) - f(b) + f(a) = 0$, c'est-à-dire que $g(b) = g(a)$. on peut donc appliquer le théorème de Rolle à la fonction g : $\exists c \in]a;b[$, $g'(c) = 0$. Or, $g'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'(c)$, donc on a $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, ce qu'on cherchait à prouver. □

Ce théorème peut paraitre assez curieux et peu utile au premier abord, et de fait sert peu en tant que tel. Mais il permet de démontrer les très importantes inégalités suivantes :

Corollaire 3. Inégalité des accroissements finis, première version.
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a;b]$, et telle que $\forall x \in [a;b]$, $m \leqslant f'(x) \leqslant M$ (où $(m, M) \in \mathbb{R}^2$), alors $\forall (y,z) \in [a;b]^2$ tels que $y < z$, $m(z-y) \leqslant f(z) - f(y) \leqslant M(z-y)$.

Démonstration. La fonction f étant dérivable sur $[y;z]$, on peut lui appliquer le théorème précédent : $\exists x \in]y;z[$, $f'(x) = \dfrac{f(z)-f(y)}{z-y}$. Or, $m \leqslant f'(x) \leqslant M$ par hypothèse, donc $m \leqslant \dfrac{f(z)-f(y)}{z-y} \leqslant M$. Il ne reste plus qu'à multiplier les inégalités par $z-y$. □

Corollaire 4. Inégalité des accroissements finis, deuxième version.
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a;b]$, et telle que $\forall x \in [a;b]$, $|f'(x)| \leqslant k$ (où $k \in \mathbb{R}$), alors $\forall (y,z) \in [a;b]^2$, $|f(z) - f(y)| \leqslant k|z-y|$.

Démonstration. La preuve est essentiellement la même que pour le corollaire précédent. □

3.2 Application à l'étude des variations

Théorème 6. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, alors f est croissante sur I si et seulement si f' est positive sur I, et f est décroissante sur I si et seulement si f' est négative sur I.

Démonstration. Supposons f croissante sur I, et soit $a \in I$, considérons le taux d'accroissement de f en a : $\tau_a(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$. Ce taux d'accroissement est toujours positif, puisque numérateur et dénominateur sont négatifs quand h est négatif, et positifs sinon ; donc par passage à la limite $f'(a) \geqslant 0$. Réciproquement, si $f'(x) \geqslant 0$ sur I, on a d'après l'IAF $y < z \Rightarrow 0 \times (z-y) \leqslant f(z) - f(y)$, ce qui prouve que f est croissante sur I. La preuve dans le cas de la décroissance est très similaire. □

Théorème 7. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, alors si f' est strictement positive sur I, sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, la fonction f est strictement croissante sur I. De même, si f' est strictement négative sur I, sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, f est strictement décroissante sur I.

Ce deuxième résultat, plus subtil que le précédent, ne sera pas prouvé. Remarquons qu'il n'y a ici qu'une seule implication, une fonction peut être strictement monotone mais avoir une dérivée qui s'annule une infinité de fois (la condition exacte pour l'équivalente est très technique).

Remarque 16. Ces théorèmes seront bien entendus utilisés sans être cités lors de l'étude des variations de fonctions, comme vous en avez déjà l'habitude. Mais vous avez désormais une preuve complète de ces résultats très classiques.

3.3 Application à l'étude de suites récurrentes

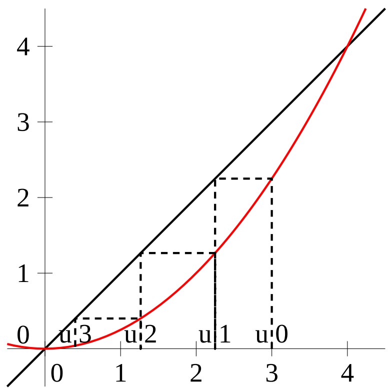
Une application extrêmement importante de l'IAF est l'étude de suites récurrentes. Très peu de résultats sont vraiment à connaitre par coeur, mais comme les méthodes utilisées sont toujours les mêmes, il est fortement souhaitable d'avoir une bonne connaissance des techniques les plus fréquentes. Nous allons donc énoncer les principaux résultats, puis étudier en détail un exemple.

Définition 11. Une **suite récurrente** est une suite vérifiant une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

Proposition 12. Les principaux résultats utilisés lors d'exercices sur les suites récurrentes sont les suivants. La plupart d'entre eux devront être redémontrés à chaque fois :

- Si (u_n) est une suite récurrente convergeant vers une limite finie l, alors $f(l) = l$.
- Si $u_0 \in I$ et I est un **intervalle stable** par f (c'est-à-dire que $f(I) \subset I$), alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$. Ce résultat est à redémontrer par récurrence dans les exercices. Cela marche aussi bien si c'est u_1 (ou n'importe quelle autre valeur de la suite) qui appartient à I.
- La monotonie de la suite (u_n) s'obtient en étudiant le signe de $f(x) - x$.
- Si les valeurs de la suite appartiennent à un intervalle I tel que $\forall x \in I$, $|f'(x)| \leqslant M$, et si l est un point fixe de f appartenant à I alors on aura $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - l| \leqslant M|u_n - l|$ (ce résultat est une conséquence de l'IAF), puis $|u_n - l| \leqslant M^n|u_0 - l|$ (résultat se prouvant par récurrence à partir du précédent), méthode très souvent utilisée pour prouver la convergence de la suite (u_n) vers l (ça marche très bien dès que $M < 1$).

On peut également représenter graphiquement une suite récurrente de la façon suivante, ce qui permet de conjecturer assez facilement le comportement de la suite : on trace dans un même repère la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f et la droite (D) d'équation $y = x$, on place u_0 sur l'axe des abscisses, puis on trace la verticale passant par u_0 jusqu'à couper $\mathcal{C}_f$, on continue horizontalement jusqu'à croiser la droite (D), et l'abscisse du point obtenu est alors u_1, auquel on peut appliquer le même procédé. Ainsi :



Exemple :
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \geqslant 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n - 2}$. Commençons par étudier la fonction f définie sur $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right[$ par $f(x) = \sqrt{3x - 2}$. Cette fonction est continue sur son ensemble de définition, dérivable sur $\left]\frac{2}{3}; +\infty\right[$, de dérivée $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-2}}$. La fonction f est donc strictement croissante. Tant que nous y sommes, cherchons les points fixes et le signe de $f(x) - x$ (les deux vont ensemble, habituellement...). On a $f(x) - x = \sqrt{3x - 2} - x = \frac{3x - 2 - x^2}{\sqrt{3x - 2} + x}$. Le trinome au numérateur

a pour discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1$, et admet deux racines $x_1 = \dfrac{-3-1}{-2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{-3+1}{-2} = 1$. La courbe représentative de f est située au-dessus de la droite d'équation $y = x$ entre 1 et 2, et en-dessous le reste du temps (donc entre $\dfrac{2}{3}$ et 1, et entre 2 et $+\infty$). À ce stade, un joli dessin devrait suffire à se convaincre qu'en prenant $u_0 \geqslant 2$, la suite (u_n) prendra toutes ses valeurs dans l'intervalle $[2; +\infty[$, sera décroissante et convergera vers 2. Prouvons tout cela correctement :

Premier point : l'intervalle $[2; +\infty[$ étant stable par f, on va réussir à prouver par récurrence la propriété suivante : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2$. C'est vrai par hypothèse pour u_0, et si on suppose $u_n \geqslant 2$, on a alors $f(u_n) \geqslant f(2) = 2$, donc $u_{n+1} \geqslant 2$, ce qui prouve l'hérédité. Le principe de récurrence permet de conclure.

Deuxième point (facultatif) : la monotonie. Comme on a $\forall x \geqslant 2$, $f(x) - x \leqslant 0$, et que $u_n \geqslant 2$, on en déduit que $f(u_n) - u_n \leqslant 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$. La suite (u_n) est donc décroissante. À ce stade de l'exercice, on peut en fait déjà déterminer la nature de (u_n) : la suite est décroissante, minorée par 2, donc converge vers une limite $l \geqslant 2$. Comme les seuls points fixes de f sont 1 et 2, on en déduit qu'on a nécessairement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$. On peut toutefois obtenir beaucoup mieux avec l'IAF.

Troisième point : majoration de l'erreur via l'IAF : on commence par majorer la dérivée (ou plutôt sa valeur absolue) sur l'intervalle où se trouvent les valeurs de la suite. Ici, on a $\forall x \geqslant 2$, $\sqrt{3x-2} \geqslant 2$, donc $|f'(x)| \leqslant \dfrac{3}{4}$ (valeur absolue ici superflue, f' étant toujours positive). On peut alors en déduire, par l'IAF, que $\forall (y,z) \in [2; +\infty[^2$, $|f(z) - f(y)| \leqslant \dfrac{3}{4}|z - y|$. Appliquons ce résultat à $y = 2$ et $z = u_n$ (qui appartient toujours à l'intervalle), on obtient $|f(u_n) - f(2)| \leqslant |u_n - 2|$. Or, $f(u_n) = u_{n+1}$, et $f(2) = 2$ (d'où l'intérêt d'avoir un point fixe !), donc $|u_{n+1} - 2| \leqslant |u_n - 2|$.

Il reste à effectuer la petite récurrence (toujours la même) pour prouver que $|u_n - 2| \leqslant \left(\dfrac{3}{4}\right)^n |u_0 - 2|$. Pour $n = 0$, c'est évident, et si on suppose le résultat vérifié pour u_n, on a alors $|u_{n+1} - 2| \leqslant \dfrac{3}{4}|u_n - 2|$ (d'après l'application de l'IAF) $\leqslant \dfrac{3}{4} \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n |u_0 - 2|$ (par hypothèse de récurrence) $\leqslant \left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+1} |u_0 - 2|$, ce qui prouve l'hérédité. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$ (il est ici essentiel que le réel majorant la dérivée de f soit strictement inférieur à 1 pour que cette suite géométrique converge effectivement vers 0), on en déduit par le théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - 2| = 0$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

Ce genre de calcul permet de déterminer assez facilement, par exemple, un entier n à partir duquel $|u_n - 2| \leqslant \varepsilon$, ε étant un réel positif quelconque. Autrement dit, on obtient facilement une majoration de la distance entre u_n et la limite de la suite. C'est assez peu intéressant ici puisqu'on connait la valeur de la limite, mais ça le sera beaucoup plus dans certains cas où on peut prouver que la suite converge vers un point fixe de la fonction f sans être capable de résoudre l'équation de point fixe. Un petit programme Pascal (par exemple !) permettra alors d'obtenir des valeurs approchées de la limite en en maitrisant l'erreur.

Et pour conclure ce chapitre, un petit tableau récapitulatif des méthodes utilisées pour étudier les suites **implicites** (étudiées dans le chapitre consacré à la continuité) et les suites **récurrentes**, du type de celle que nous venons d'étudier. Il va de soi qu'il est préférable de ne pas confondre les deux types de suites.

	Suites implicites	Suites récurrentes
Définition	$f_n(u_n) = 0$ ou $f(u_n) = n$	$u_{n+1} = f(u_n)$
Majoration/ minoration	On calcule $f_n(m)$ ou $f_n(M)$ et on utilise la monotonie de f_n.	On cherche un intervalle stable par la fonction f.
Monotonie	Signe de $f_{n+1}(u_n)$	Signe de $f(x) - x$
Limite	On repart de $f_n(u_n) = 0$ et on essaye de passer à la limite.	On résout $f(l) = l$.