Dénombrement

ECE3 Lycée Carnot

12 novembre 2010

Introduction

La combinatoire, science du dénombrement, sert comme son nom l'indique à compter. Il ne s'agit bien entendu pas de revenir au stade du CP et d'apprendre à compter sur ses doigts, mais bien de définir des objets et notations mathématiques permettant de compter le nombre d'éléments d'ensemble bien trop gros et compliqués pour être dénombrés à la main. Le dénombrement n'a pas en soi énormément d'intérêt, mais trouvera toute son utilité ensuite en probabilités : dans le cadre des probabilités finies, la probabilité d'un évènement se calcule en divisant le nombre de cas favorables par le nombre total de cas possibles, ce qui suppose qu'on sache calculer les nombres de cas en question.

Quelques exemples de problèmes faisant intervenir les objets que nous allons étudier dans ce cours :

- Un joueur de poker tire (simultanément) cinq cartes dans un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité qu'il obtienne un brelan (trois cartes de même rang) ?
- Il y a 45 élèves dans la classe. Quelle est la probabilité qu'il y en ait (au moins) deux parmi eux qui soient nés le même jour de l'année ?
- Six élèves de la classe s'assoient autour d'une table ronde à la cantine. De combien de façon peuvent-ils le faire ? Si deux d'entre eux ne se supportent pas, quelle est la probabilité qu'ils se retrouvent l'un en face de l'autre ? Si deux autres s'apprécient particulièrement, quelle est la probabilité qu'ils se retrouvent côte à côte ? Quelle est la probabilité que les deux conditions soient remplies simultanément ?

1 Cardinaux d'ensembles finis

1.1 Quelques définitions

Définition 1. Un ensemble E est **fini** s'il est en bijection avec l'ensemble $\{1; 2; \dots; n\}$, pour un entier naturel n. Cet entier n est alors unique. Il est appelé **cardinal** de l'ensemble E, et on le note $card(E)$, ou $|E|$, ou encore $\sharp E$.

Remarque 1. Cela correspond bien à la notion intuitive d'ensemble dont on peut compter les éléments. En effet, une bijection de E vers $\{1; \dots; n\}$ est simplement une façon d'étiquetter les éléments de E avec les numéros 1, 2, ..., n.

Proposition 1. Soit E un ensemble fini et F un sous-ensmble de E, alors F est un ensemble fini, et $|F| \leqslant |E|$, avec égalité si et seulement si $E = F$.

Démonstration. Cette propriété, comme souvent en ce qui concerne les ensembles finis, est assez évidente d'un point de vue intuitif, mais pas si simple à démontrer correctement. Nous nous en tiendrons au point de vue intuitif. $\square$

Proposition 2. Soient E et F deux ensembles finis. Si E et F sont en bijection l'un avec l'autre, ils ont même cardinal.

Démonstration. Il existe par hypothèse une bijection f de E vers F. De plus, F étant fini, notons n son cardinal, il existe alors une bijection g de F dans $\{1;\dots;n\}$. L'application $g\circ f : E \to \{1;\dots;n\}$ est une composée d'applications bijectives, donc est bijective, ce qui prouve que E est de cardinal n. □

1.2 Cardinaux élémentaires

Proposition 3. Soient A et B deux sous-ensembles d'un même ensemble fini E. Alors $|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$.

Démonstration. Commençons par constater que dans le cas où les deux ensembles A et B sont disjoints, on a $|A\cup B| = |A|+|B|$. Vous voulez une démonstration ? Soit f une bijection de A dans $\{1;\dots;n\}$ et g une bijection de B dans $\{1;\dots;p\}$, n et p étant les cardinaux respectifs de A et de B. On peut alors construire une bijection h de $A\cup B$ vers $\{1;\dots;n+p\}$ en posant $\forall x\in A$, $h(x) = f(x)$ et $\forall x \in B$, $h(x) = g(x)+p$ (intuitivement, cela revient à garder pour les éléments de A la numérotation donnée par l'application f, et à décaler pour les éléments de B la numérotation donnée par g, de façon à ne pas utiliser deux fois les mêmes numéros). Une fois ce fait admis, constatons que $A\cup B$ est l'union disjointe des trois ensembles $A\backslash B$, $B\backslash A$ et $A\cap B$. On a donc, en utilisant le résultat que nous venons de démontrer, $|A\cup B| = |A\backslash B| + |B\backslash A| + |A\cap B|$. Or, A étant union disjointe de $A\backslash B$ et de $A\cap B$, on a également $|A| = |A\backslash B| + |A\cap B|$, ou encore $|A\backslash B| = |A| - |A\cap B|$. De même, $|B\backslash A| = |B| - |A\cap B|$, donc on obtient $|A\cup B| = |A| - |A\cap B| + |B| - |A\cap B| + |A\cap B|$, ce qui donne bien la formule annoncée. □

Théorème 1. Formule du crible de Poincaré.

Soient A_1, A_2, …, A_n des sous-ensembles finis d'un même ensemble E, alors

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{k=1}^{n} \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} (-1)^{k+1}|A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}|$$

Proposition 4. La formule de Poincaré étant assez peu lisible, voici ce que ça donne pour $n=3$ et $n=4$:

$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$

$|A\cup B\cup C\cup D| = |A|+|B|+|C|+|D|-|A\cap B|-|A\cap C|-|A\cap D|-|B\cap C|-|B\cap D|-|C\cap D|+|A\cap B\cap C|+|A\cap B\cap D|+|A\cap C\cap D|+|B\cap C\cap D|-|A\cap B\cap C\cap D|$

Démonstration. La preuve de la formule générale, assez technique, se fait par récurrence. On se contentera de prouver la formule pour $n=3$ en partant de la proposition précédente : $|A\cup B\cup C| = |(A\cup B)\cup C| = |A\cup B| + |C| - |(A\cup B)\cap C| = |A|+|B|-|A\cap B|+|C|-|(A\cap C)\cup(B\cap C)| = |A|+|B|-|A\cap B|+|C|-|A\cap C|-|A\cap B|+|A\cap C\cap B\cap C|$, ce qui donne bien la formule annoncée. □

Exemple : Dans un lycée de 300 élèves, 152 savent jouer au poker, 83 au tarot et 51 au bridge. De plus, 24 savent jouer à la fois au poker et au tarot, 14 au poker et au bridge, et 8 au tarot et au bridge. Enfin, 3 élèves maitrisent les trois jeux de cartes. Le nombre d'élèves jouant aux cartes est alors de $152+83+51-24-14-8+3 = 237$.

Proposition 5. Soit A un sous-ensemble fini d'un ensemble fini E, alors $|\bar{A}| = |E| - |A|$.

Démonstration. C'est une conséquence de la formule pour une union : E est union disjointe de A et de $\bar{A}$, donc $|E| = |A| + |\bar{A}|$. □

Proposition 6. Soient E et F deux ensembles finis, alors $E\times F$ est fini, et $|E\times F| = |E|\times|F|$.

Démonstration. Pas de preuve rigoureuse pour celui-ci, simplement une idée de la façon dont ça marche. Soit n le cardinal de E, et $e_1, e_2, \dots, e_n$ ses éléments, p le cardinal de F et $f_1, \dots, f_p$ ses éléments. on peut placer les éléments de $E \times F$ dans un tableau de la façon suivante :

	e_1	e_2	$\dots$	e_n
f_1	(e_1, f_1)	(e_2, f_1)	$\dots$	(e_n, f_1)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
f_p	(e_1, f_p)	(e_2, f_p)	$\dots$	(e_n, f_p)

Il y bien $n \times p$ éléments dans le tableau, donc dans $E \times F$. □

2 Listes, arrangements et combinaisons

Définition 2. Soit E un ensemble fini de cardinal n, et $p \in \mathbb{N}$. Une **p-liste** d'éléments de E, ou p-uplet d'éléments de E, est simplement un élément de E^p.

Remarque 2. On peut très bien avoir plusieurs fois le même élément dans une p-liste. Par ailleurs, l'ordre des éléments de la p-liste est important.

Proposition 7. Le nombre de p-listes dans un ensemble de cardinal n vaut n^p.

Démonstration. C'est une conséquence de la formule de cardinal du produit vue un peu plus haut : comme $|E \times F| = |E| \times |F|$, on a $|E^p| = |E|^p$, ce qui prouve bien la propriété. □

Exemple : On lance 10 fois de suite un dé équilibré à six faces. Le nombre total de tirages possibles est 6^{10} (l'ordre est important, et on peut très bien tirer plusieurs fois le même chiffre ; il s'agit donc de listes).

Remarque 3. Le nombre de p-listes d'un ensemble à n éléments est aussi le nombre d'applications de l'ensemble $\{1; \dots; p\}$ vers cet ensemble. En effet, se donner une telle application f revient à se donner les valeurs des images $f(1)$, $f(2)$, …, $f(p)$, c'est-à-dire à se donner une liste de p éléments de E.

Définition 3. Soit E un ensemble à n éléments et $p \in \mathbb{N}$, on appelle **arrangement** de p éléments de E une p-liste d'éléments distincts de E.

Remarque 4. L'ordre des éléments est toujours important, par contre on ne peut plus avoir de répétition d'élément dans un arrangement.

Définition 4. Soient n et p deux entiers tels que $p \leqslant n$, on note $A_{n,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)$.

Proposition 8. Le nombre d'arrangements de p éléments dans un ensemble à n éléments vaut $A_{n,p}$.

Démonstration. Contentons-nous de l'idée intuitive : lorsqu'on construit un arrangement, on a n choix pour le premier élément, $n-1$ pour le deuxième, …, $n-p+1$ pour le $p$ème, soit au total $n(n-1) \times (n-p+1) = \dfrac{n(n-1)\dots(n-p+1)(n-p)\dots 2 \times 1}{n(n-1)\dots 2 \times 1} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$. □

Exemple : Les arrangements interviendront quand on travaillera avec des tirages successifs sans remise (ce qui interdit les répétitions). Par exemple, si 10 athlètes participent à une course, le nombre de podiums possibles est $A_{10,3} = 10 \times 9 \times 8 = 720$. En effet, l'ordre des athlètes sur le podium est important, mais on ne peut pas avoir le même athlète sur deux marches du podium à la fois !

Remarque 5. Le nombre d'arrangements de p éléments dans un ensemble à n éléments est également le nombre d'applications injectives de $\{1; \dots; p\}$ dans E.

Définition 5. Un arrangement de n éléments dans un ensemble à n éléments est aussi appelé **permutation**. Il y a donc $n!$ permutations dans un ensemble à n éléments.

Exemple : Le nombre de façons d'asseoir 6 personnes autour d'une table ronde est $6! = 720$. Si l'on veut que deux personnes spécifiées à l'avance ne soient pas en face l'une de l'autre, il reste $6 \times 4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 576$ placements (on place d'abord les deux ennemis : on a 6 possibilités pour le premier, mais 4 au lieu de 5 pour le deuxième puisqu'on doit éviter les deux places voisines du premier ; ensuite, tout se déroule comme précédemment). Si l'on veut maintenant que deux personnes parmi les 6 soient côte à côte, il y a $6 \times 2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 288$ placements (on place d'abord les deux copains : 6 possibilités pour le premier et, la table étant ronde, 2 places pour le deuxième à côté du premier). Enfin, si on impose les deux conditions simultanément, il y a toujours 12 façons de placer les deux amis pour commencer ; puis $4! - 4$ façons de placer les quatre autres sur les quatre places restantes (je vous laisse vérifier que parmi les $4!$ permutations, il y en 4 pour lesquelles les deux ennemis seront en face l'un de l'autre), soit $12 \times 20 = 240$ placements corrects. La probabilité correspondante est de $\dfrac{240}{720} = \dfrac{1}{3}$.

Exemple : Le nombre d'anagrammes d'un mot peut se calculer à l'aide de permutations. Il faut simplement diviser le nombre total du permutations du mot par $k!$ chaque fois qu'une même lettre apparait k fois dans le mot (ainsi, s'il y a trois E dans le mot, on divise par $3!$ car les permutations qui se contentent d'échanger les E entre eux ne modifient pas l'anagramme). Par exemple, le nombre d'anagrammes du mot DENOMBREMENT est $\dfrac{12!}{3! \times 2! \times 2!}$.

Remarque 6. Le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est le nombre d'applications bijectives de cet ensemble dans lui-même.

Proposition 9. Quelques propriétés des factorielles, plus ou moins utiles :
- Par convention, $0! = 1$
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)! = n! \times (n+1)$
- $\forall a > 1$, $a^n = o(n!)$, mais $n! = o(n^n)$. (Pour les plus curieux, je signale le joli résultat suivant, connu sous le nom de formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$)

Définition 6. Une **combinaison** de p éléments dans un ensemble fini E à n éléments est un sous-ensemble à p éléments de E.

Définition 7. Soient n et p deux entiers tels que $p \leqslant n$, on appelle **coefficient binomial** d'indices n et p le nombre $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$. Ce nombre est également noté C_n^p, et on le lit « p parmi n » (comme un raccourci signifiant que le nombre de façon de choisir p objets parmi n objets au total).

Remarque 7. On pose souvent $\dbinom{n}{p} = 0$ si $p > n$.

Proposition 10. Le nombre de sous-ensembles à p éléments d'un ensemble à n éléments est $\dbinom{n}{p}$.

Démonstration. En effet, une combinaison n'est rien d'autre qu'un arrangement dans lequel on a enlevé l'importance de l'ordre. Autrement dit, chaque combinaison apparait $p!$ fois quand on dénombre les arrangements (puisqu'il y a $p!$ façons d'ordonner un ensemble à p éléments), donc le nombre de combinaisons à p éléments vaut $\dfrac{A_{n,p}}{p!} = \dbinom{n}{p}$. □

Exemple : Les combinaisons apparaitront dans les calculs dès qu'on travaillera avec des tirages simultanés, c'est–dire quand l'ordre n'est pas important. Ainsi, le nombre de trinomes de colle différents qu'on peut constituer dans une classe de 45 élèves vaut $\dbinom{45}{3} = \dfrac{45 \times 44 \times 43}{3 \times 2 \times 1} = 14190$.

Remarque 8. On peut encore une fois interpréter ceci à l'aide d'applications : le nombre de combinaisons à p éléments dans un ensemble à n éléments est le nombre d'applications strictement croissantes de $\{1;\dots;p\}$ dans E. En effet, se donner une application strictement croissante f est équivalent à se donner le sous-ensemble $\{f(1);f(2),\dots;f(p)\}$ (l'ordre étant imposé par la croissance de l'application).

Un petit tableau pour résumer les cas d'utilisations de ces trois outils de dénombrement :

	L'ordre n'est pas important	L'ordre est important
Répétitions possibles		Listes $\rightarrow$ puissances
Répétition interdites	Combinaisons $\rightarrow$ coefficients binômiaux	Arrangements $\rightarrow$ quotient de factorielles

3 Propriétés des coefficients binomiaux

Proposition 11. Quelques propriétés des coefficients binomiaux, utiles pour les calculs :

- $\forall n \geqslant 2$, $\binom{n}{0} = 1$; $\binom{n}{1} = n$; $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.
- $\forall k \leqslant n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (propriété de symétrie).
- $\forall 1 \leqslant k \leqslant n$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.
- $\forall 1 \leqslant k \leqslant n$, $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$ (relation de Pascal).

Démonstration. Pour le premier point, il suffit de reprendre la définition des coefficients binomiaux : $\binom{n}{0} = \dfrac{n!}{0!n!} = 1$; $\binom{n}{1} = \dfrac{n!}{(n-1)!} = n$ et $\binom{n}{2} = \dfrac{n!}{2!(n-2)!} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

La propriété de symétrie est facile aussi : $\binom{n}{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \dfrac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$. Il y a également une interprétation combinatoire de ce résultat : choisir un sous-ensemble de k éléments dans un ensemble à n éléments est équivalent à choisir son complémentaire, qui est constitué de $n-k$ éléments, donc il y a autant de sous-ensembles à k éléments et à $n-k$ éléments dans un ensemble à n éléments.

Pour la troisième, $k\binom{n}{k} = \dfrac{k \times n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$, et $n\binom{n-1}{k-1} = \dfrac{n \times (n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} = \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$, les deux quantités sont bien égales.

Enfin, la formule de Pascal : $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \dfrac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$ $= \dfrac{(n-k) \times (n-1)! + k \times (n-1)!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n \times (n-1)!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$. La encore, il y a une interprétation combinatoire. Soit E un ensemble à n éléments et x un élément fixé de E. Les sous-ensembles de E à k éléments, au nombre de $\binom{n}{k}$, se répartissent en deux catégories : ceux qui contiennent x, qui sont au nombre de $\binom{n-1}{k-1}$ puisqu'il reste $k-1$ éléments à choisir parmi les $n-1$ restants dans E une fois x choisi ; et ceux qui ne contiennent pas x, qui sont au nombre de $\binom{n-1}{k}$ puisqu'il reste cette fois-ci k éléments à choisir parmi les $n-1$ restants (on n'en a encore choisi aucun). D'où la formule. □

Triangle de Pascal : La relation de Pascal permet de calculer les valeurs des coefficients binomiaux par récurrence, en les répartissant sous forme d'un tableau triangulaire :

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
$n=0$	1								
$n=1$	1	1							
$n=2$	1	2	1						
$n=3$	1	3	3	1					
$n=4$	1	4	6	4	1				
$n=5$	1	5	10	10	5	1			
$n=6$	1	6	15	20	15	6	1		
$n=7$	1	7	21	35	35	21	7	1	
$n=8$	1	8	28	56	56	56	28	7	1

Pour obtenir un coefficient du tableau, on fait la somme de celui qui est au-dessus de lui, et de celui qui est à gauche de celui-ci.

Théorème 2. Formule du binôme de Newton.
Soient a et b deux réels, et $n \in \mathbb{N}$, alors $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Remarque 9. On peut obtenir à partir de cette formule le développement d'une différence : $(b-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k a^k b^{n-k}$. En pratique, il suffit d'alterner les signes.

Exemple : $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$. L'ordre est inversé par rapport à celui de la formule, mais c'est la façon habituelle d'écrire le développement. Autre exemple : $(1-2x)^5 = 1 - 5 \times 2x + 10 \times (2x)^2 - 10 \times (2x)^3 + 5 \times (2x)^4 - (2x)^5 = 1 - 10x + 40x^2 - 80x^3 + 80x^5 - 32x^5$.

Démonstration. On va procéder par récurrence sur l'entier n. Pour $n = 0$, la formule du binome dit simplement que $(a+b)^0 = \binom{0}{0} a^0 b^0$, ce qui est vrai (on a 1 de chaque côté). Supposons la formule vraie au rang n, on a alors $(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ par hypothèse de récurrence, donc en développant le $a+b$ et en le faisant rentrer dans la somme, on obtient $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$. Effectuons un changement d'indice en remplaçant k par $k+1$ dans la première somme (on ne touche à rien dans la deuxième) : $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} = \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1}$ (on a isolé un terme dans chaque somme pour pouvoir regrouper les sommes). Maintenant, on reconnait la formule de Pascal dans la somme, donc $(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + b^{n+1}$. Il ne reste plus qu'à remettre les deux termes isolés dans la somme pour obtenir la formule au rang $n+1$, ce qu'on peut faire puisqu'ils sont justement égaux aux termes manquants pour $k = 0$ et $k = n+1$. □

Proposition 12. Soit E un ensemble fini de cardinal n. Alors $\mathcal{P}(E)$ est fini, de cardinal 2^n.

Démonstration. Le cardinal de $\mathcal{P}(E)$ est le nombre de sous-ensembles de E. Or, on sait que, pour tout entier k, il y a $\binom{n}{k}$ sous-ensembles de E à k éléments, ce qui fait au total $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ sous-ensembles.

Cette somme n'est rien d'autre qu'un cas particulier de formule du binôme, pour $a = b = 1$, donc elle vaut $(1+1)^n = 2^n$.

Une façon plus combinatoire de voir les choses : choisir un sous-ensemble A de l'ensemble E revient à choisir, pour chaque élément de E, si celui-ci appartient à A ou non. On a ainsi deux possibilités pour chaque élément de E, ce qui fait au total 2^n possibilités pour construire le sous-ensemble A. Autre façon de décrire les choses pour les plus formalistes d'entre vous : pour chaque sous-ensemble A de E, on définit une application $\chi_A : E \to \{0;1\}$, telle que $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$, et $\chi_A(x) = 0$ si $x \notin A$ (cette application χ_A est appelée application caractéristique de l'ensemble A, car elle décrit les éléments appartenant à l'ensemble A). On peut prouver que toutes applications de E vers $\{0;1\}$ sont des applications caractéristiques d'un sous-ensemble de E, et que deux sous-ensembles distincts de E ont des applications caractéristiques différentes. Autrement dit, il y a une bijection entre $\mathcal{P}(E)$ et l'ensemble des applications de E dans $\{0;1\}$. Or, comme on l'a vu plus haut (après la définition des p-listes), il y a 2^n applications de E dans $\{0;1\}$. □

Proposition 13. Formule de Vandermonde.
Soient a, b et n trois entiers naturels tels que $n \leqslant a+b$, alors $\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$.

Démonstration. On va passer par une interprétation combinatoire. Considérons un groupe constitué de a hommes et b femmes, parmi lesquels on veut choisir n personnes. On sait déjà qu'il y a $\binom{a+b}{n}$ possibilités de faire ce choix (ce qui correspond au membre de gauche de notre inégalité). Mais on peut également classer les groupes de n personnes en catégories selon le nombre d'hommes qu'ils contiennent : soit 0 homme et n femmes (il y a $\binom{a}{0}\binom{b}{n}$ tels groupes), soit 1 homme et $n-1$ femmes (il y a $\binom{a}{1}\binom{b}{n-1}$ tels groupes), etc, jusqu'à la possibilité d'avoir n hommes et 0 femme (il y a $\binom{a}{n}\binom{b}{0}$ tels groupes). Le nombre total de groupes possibles vaut donc aussi $\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$. □