TP 9 : Corrigé

ECE3 Lycée Carnot

14 janvier 2010

Exercice 1

1. - Il y a $n-1$ multiplications à faire au numérateur pour calculer $n!$, et $n-1$ au dénominateur également ($k-1$ pour $k!$, $n-k-1$ pour l'autre factorielle, et une dernière pour multiplier les 2), et enfin une division. Le tout à faire $n+1$ fois pour remplir complètement la ligne. Soit $n+1$ divisions et $(n+1)(2n-1)$ multiplications, donc de l'ordre de $2n^3$ opérations.
   - On fera $n-1+n-2+\cdots+1 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ multiplications pour calculer toutes les factorielles, et deux opérations supplémentaires pour chaque coefficient binomial (une multiplication et une division), soit $\dfrac{n(n-1)}{2} + 2(n+1)$ opérations, donc de l'ordre de $\dfrac{n^2}{2}$ opérations.
   - Il suffit en fait d'effectuer $n-1$ multiplications pour toutes les factorielles. On a alors au total $n-1+2(n+1) = 3n+1$ opérations.
   - Cette fois-ci, on ne fera que des additions : 1 pour passer de la ligne 1 à la ligne 2, 2 pour le passage à la ligne 3 etc, jusqu'à $n-1$ pour le passage à la ligne n, donc au total $\dfrac{n(n-1)}{2}$ additions.
2. Pour la ligne 50, on a donc le choix, en considérant les deux dernières méthodes, entre 151 multiplications (ou divisions) et 1 225 additions. Si une addition est 10 fois plus rapide qu'une multiplication, la dernière méthode est légèrement plus rapide. En pratique, elle est en fait beaucoup plus efficace car toutes les méthodes à base de multiplications vont effectuer des calculs sur des entiers énormes, qui vont très vite devenir très longs.

Exercice 2

1. On a besoin de 15 comparaisons pour trouver le plus élément, puis de 14 pour le deuxième etc, soit au total $\dfrac{15 \times 16}{2} = 120$ comparaisons. Pour un tableau à n éléments, on aurait de l'ordre de $\dfrac{n^2}{2}$ comparaisons.
2. Il y a 15 comparaisons à effectuer à chaque tour, soit au total $15 \times 15 = 225$ comparaisons (on peut faire moins de comparaisons à partr du deuxième tour pour se ramener au même nombre de comparaisons que ci-dessus).
3. Il faut 8 comparaisons pour trier les paquets de 2, 4×3 comparaisons pour les regrouper en paquets de 4, puis 2×7 comparaisons pour faire 2 paquets de 8 et enfin 15 comparaisons pour la dernière étape, soit au total 49 comparaisons. Pour un tableau à n éléments, on peut prouver que le nombre de comparaisons sera de l'ordre de $n \times \ln n$, ce qui est nettement plus efficace que les deux algorithmes précédents.