TD 16 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

29 avril 2011

Méthode des rectangles

1. C'est une application immédiate de l'IAF, toutes les hypothèses ayant gentiment été données dans l'énoncé.
2. Constatons que $\left|\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt - \frac{b-a}{n} f(a_i)\right| = \left|\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt - \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(a_i)dt\right| \leqslant \int_{a_i}^{a_{i+1}} |f(t) - f(a_i)|dt$ (en utilisant les propriétés du cours sur les valeurs absolues). On peut appliquer alors le résultat de la question précédente pour majorer l'erreur par $M_1 \int_{a_i}^{a_{i+1}} t - a_i dt$ ($t - a_i$ étant toujours positif sur l'intervalle d'intégration, on se débarasse de la valeur absolue). Or $\int_{a_i}^{a_{i+1}} t - a_i dt = \left[\frac{t^2}{2} - a_i t\right]_{a_i}^{a_{i+1}} = \frac{a_{i+1}^2}{2} - a_i a_{i+1} - \frac{a_i^2}{2} + a_i^2 = \frac{a_{i+1}^2 - 2a_i a_{i+1} + a_i^2}{2} = \frac{(a_{i+1} - a_i)^2}{2} = \frac{(b-a)^2}{2n^2}$. L'erreur maximale commise sur $[a_i; a_{i+1}]$ est donc de $\frac{M_1(b-a)^2}{2n^2}$.
   L'erreur totale commise sur l'intervalle $[a; b]$ vaut n fois l'erreur précédente (puisque l'intervalle a été découpé en n morceaux), soit $\frac{M_1(b-a)^2}{2n}$.
3. On a sous ces hypothèses une erreur maximale de $\frac{5}{n}$. Cette erreur descend sous la valeur 0.01 pour $n = 500$, et en-dessous de 10^{-9} pour $n = 5\ 000\ 000\ 000$ (ce qui fait un gros paquet de rectangles !).

Méthode des trapèzes

1. Vous aurez peut-être droit à un petit dessin le jour où je serai motivé. En attendant, contentons-nous de constater qu'on dessine sur l'intervalle $[a_i; a_{i+1}]$ un trapèze dont les côtés parallèles ont pour longueur $f(a_i)$ et $f(a_{i+1}$, et donc la largeur vaut, comme pour les rectangles précédemment, $\frac{b-a}{n}$. On en déduit donc que, via cette méthode, $\int_a^b f(t)dt = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{i=n-1} \frac{f(a_i) + f(a_{i+1})}{2} = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{i=1}^{i=n-1} f(a_i) + \frac{f(b)}{2}\right)$.
2. On obtient alors, de façon très similaire à ce qui se passait pour les rectangles, une erreur majorée par $\int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{M_2}{2}(a_{i+1} - t)(t - a_i)dt$ (tout cela étant positif). Ne reste plus qu'à calculer $\int_{a_i}^{a_{i+1}} (a_{i+1} - t)(t - a_i)dt = \int_{a_i}^{a_{i+1}} -t^2 + a_i t + a_{i+1} t - a_i a_{i+1} dt = \left[-\frac{t^3}{3} + \frac{a_i t^2}{2} + \frac{a_{i+1} t^2}{2} - a_i a_{i+1} t\right]_{a_i}^{a_{i+1}} = -\frac{a_{i+1}^3}{3} + \frac{a_i a_{i+1}^2}{2} + \frac{a_{i+1}^3}{2} - a_i a_{i+1}^2 + \frac{a_i^3}{3} - \frac{a_i^3}{2} - \frac{a_{i+1} a_i^2}{2} + a_i^2 a_{i+1} = \frac{a_{i+1}^3 - 3a_{i+1}^2 a_i + 3a_i^2 a_{i+1} - a_i^3}{6} = \frac{(a_{i+1} - a_i)^3}{6} = \frac{(b_a)^3}{6n^3}$. En découle une erreur sur $[a_i; a_{i+1}]$ inférieure à $\frac{M_2(b-a)^3}{12n^3}$

Comme précédemment, cette majoration sera multipliée par n pour obtenir l'erreur maximale sur l'intervalle $[a;b]$ tout entier, qui vaut donc $\dfrac{M_2(b-a)^3}{12n^2}$.

3. Avec les données de l'énoncé, l'erreur est majorée par $\dfrac{25}{3n^2}$. Elle descend en-dessous de 0.01 si $n^2 \geqslant \dfrac{2500}{3}$, soit $n \geqslant 29$; et en-dessous de 10^{-9} lorsque $n^2 \geqslant \dfrac{25 \times 10^9}{3}$, soit $n \geqslant 91\ 288$.
4. Au vu de la somme obtenue pour les trapèzes, on effectue en fait à peine plus de calcul avec cette méthode qu'avec la précédente : une image de plus à calculer par la fonction f, et deux divisions par 2. Les valeurs de n nécessaires pour obtenir de bonnes approximations étant nettement plus petites avec les trapèzes, cette méthode est largement préférable.

Méthode de Simpson

1. Il suffit de vérifier que ça marche sur un intervalle, c'est-à-dire de prouver que $6\displaystyle\int_a^b x^2 = (b-a)\left(a^2+b^2+4\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right) = (b-a)(a^2+b^2+a^2+2ab+b^2) = 2(b-a)(a^2+b^2+ab) = 2(ba^2+b^3+ab^2-a^3-ab^2-a^2b) = 2(b^3-a^3)$. En effet, $6\displaystyle\int_a^b x^2dx = 6\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b = 2(b^3-a^3)$. On peut ensuite découper en n morceaux si on le souhaite, chacun des morceaux d'intégrale sera égal à chaque morceau de somme.

Et le Pascal dans tout ça ?

Nous avons écrit trois programmes (un pour chaque méthode) permettant de calculer une valeur approchée de $\displaystyle\int_1^2 \ln x dx$, la valeur de n étant choisie par l'utilisateur. D'abord avec les rectangles, en prenant les valeurs à droite des rectangles :

```
PROGRAM rectangles;
USES wincrt;
VAR i,n : integer; s : real;
BEGIN
WriteLn('Choisissez la valeur de n');
ReadLn(n);
s := 0;
FOR i := 1 TO n DO s := s+ln(1+i/n);
WriteLn(s/n);
END.
```

On enchaine avec les trapèzes (pas grand chose à changer) :

```
PROGRAM trapezes;
USES wincrt;
VAR i,n : integer; s : real;
BEGIN
WriteLn('Choisissez la valeur de n');
ReadLn(n);
s := 0;
FOR i := 1 TO n-1 DO s := s+ln(1+i/n);
s := s+ln(2)/2;
```

```
WriteLn(s/n) ;
END.
```

Et enfin Simpson :

```
PROGRAM Simpson ;
USES wincrt ;
VAR i,n : integer ; s : real ;
BEGIN
WriteLn('Choisissez la valeur de n') ;
ReadLn(n) ;
s := 0 ;
FOR i := 0 TO n-1 DO s := s+ln(1+i/n)+ln(1+(i+1)/n)+4*ln(1+(2*i+1)/(2*n)) ;
WriteLn(s/(6*n)) ;
END.
```

Comme on sait par ailleurs calculer la valeur exacte de cette intégrale (qui vaut $2\ln 2 - 1 \simeq 0.38629436112$), on peut tester la rapidité de convergence de chaque méthode. Ce-dessous, un tableau regroupant le nombre de décimales exactes obtenues pour chaque méthode, pour diverses valeurs de n :

n	10	100	1 000	10 000
Rectangles	1	2	3	4
Trapèzes	3	5	7	9
Simpson	7	11		