# TD 16 : Intégration numérique

ECE3 Lycée Carnot

29 avril 2011

Pour calculer une intégrale à la main, rien de plus facile, il suffit de maîtriser à la perfection primitives, changements de variables et autres intégrations par parties. La machine, elle, va compenser comme d'habitude son intelligence limitée par une capacité de calcul impressionnante. Nous allons étudier dans ce TD quelques méthodes permettant de calculer des valeurs approchées d'intégrale à l'aide de calculs de sommes, et essayer de comparer ces méthodes entre elles.

## Méthode des rectangles

C'est une méthode que nous avons déjà abordée en cours de maths lorsque nous avons parlé de sommes de Riemann. Il s'agit simplement de découper l'intervalle d'intégration en $n$ morceaux et, sur chacun de ces morceaux, d'approcher la courbe de la fonction $f$ par un rectangle dont la hauteur est donnée par l'image par $f$ du point situé à gauche du rectangle. Ainsi, on effectue le calcul suivant : $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \simeq \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$. Maintenant, à vous de travailler (pour plus de simplicité, on note $a_i = a + k\dfrac{b-a}{n}$ dans ce qui suit)

1. Montrer que, $\forall x \in [a_i; a_{i+1}]$, $|f(x) - f(a_i)| \leqslant M_1|x - a_i|$, où $M_1$ est un majorant de $f'$ sur $[a; b]$.
2. En déduire une majoration de l'erreur commise en approchant $\displaystyle\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt$ par $f(a_i)\dfrac{b-a}{n}$, puis majorer l'erreur commise lorsqu'on calcule l'intégrale de $f$ sur $[a; b]$ par cette méthode.
3. On suppose dans cette question $a = 0$ et $b = 1$, et on admet que pour les fonctions qu'on cherchera à intégrer, on aura toujours $M_1 \leqslant 10$. Déterminer les plus petites valeurs de $n$ pour lesquelles notre calcul d'intégrale sera valable à 0.01 près, puis à $10^{-9}$ près.

## Méthode des trapèzes

Le principe est très similaire à celui de la méthode des rectangles, la seule différence étant qu'au lieu d'approcher la courbe par un rectangle de hauteur $f(a_i)$, on utilise cette fois un trapèze dont le dernier côté joint les points $(a_i, f(a_i))$ et $(a_{i+1}, f(a_{i+1}))$.

1. Faire un petit dessin pour représenter la situation, puis écrire la valeur approchée sous forme d'une somme similaire à celle utilisée pour la méthode des rectangles.
2. On admet la généralisation suivante de l'inégalité des accroissements finis : pour tout $x$ appartenant à l'intervalle $[a_i, a_{i+1}]$, l'écart entre $f(x)$ et la valeur obtenue sur le trapèze est majoré en valeur absolue par $(a_{i+1} - x)(x - a_i)\dfrac{M_2}{2}$, où $M_2$ est un majorant de $|f''|$ sur $[a; b]$. En déduire, comme ci-dessus, une majoration de l'erreur commise en utilisant la méthode des trapèzes pour approcher notre intégrale.

3. En reprenant à nouveau $a = 0$ et $b = 1$, et en admettant cette fois-ci qu'on aura $M_2 \leqslant 100$, donner des valeurs de $n$ pour lesquelles l'erreur est plus petite que 0.01, puis plus petite que $10^{-9}$.
4. Comparer le nombre de calculs effectués par chaque méthode. Laquelle semble la plus efficace ?

## Méthode de Simpson

Le principe est toujours le même : découper l'intervalle en $n$ morceaux, et utiliser pour chacun de ces morceaux un calcul approché faisant intervenir les valeurs de la fonction $f$ en certains points. La méthode des rectangles se contentait de prendre la valeur en un point, celle des trapèzes faisait une moyenne entre deux valeurs ; pour Simpson, on passe à trois images, avec des coefficients un peu inattendus : $\displaystyle\int_{a_i}^{a_{i+1}} f \simeq \frac{f(a_i) + 4f(\frac{a_i+a_{i+1}}{2}) + f(a_{i+1})}{6}(a_{i+1} - a_i)$.

1. Vérifier que cette méthode donne la valeur exacte de l'intégrale pour un polynôme de degré 2 (vous pouvez vous contenter de vérifier que ça marche pour $f(x) = x^2$).

On admet que cette méthode est encore nettement plus efficace que celle des trapèzes dans le cas général.

## Et le Pascal dans tout ça ?

Il serait grand temps en effet de revenir à de la programmation. Votre but est simple : écrire un programme calculant une valeur approchée de l'intégrale d'une fonction $f$ donnée (on ne peut pas demander à l'utilisateur de saisir la fonction en Pascal, c'est trop compliqué) entre deux bornes $a$ et $b$ choisies par l'utilisateur, tout d'abord en utilisant la méthode des rectangles, puis en utilisant la méthode des trapèzes, et enfin la méthode de Simpson (on fera trois programmes distincts, et on laissera également le choix à l'utilisateur de l'entier $n$ représentant le nombre de morceaux dans le découpage de l'intervalle).