# TD 15 : Suites récurrentes

ECE3 Lycée Carnot

1er avril 2011

## Exercice 1

Dans une récente feuille d'exercices de mathématiques, nous avons étudié la suite récurrente $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{4}(2 - u_n^2)$. Nous avons prouvé qu'elle convergeait vers $\sqrt{2}$ et qu'on avait $|u_n - \sqrt{}| \leqslant 10^{-9}$ dès que $n \geqslant 30$ (en utilisant l'IAF).

1. Écrire un programme Pascal demandant un entier $n$ à l'utilisateur et affichant les valeurs des $n$ premiers termes de la suite (et pas uniquement celle de $u_n$).
2. Écrire un programme qui calcule la première valeur de $u_n$ pour laquelle $|u_n - \sqrt{2}| \leqslant \varepsilon$, la valeur de $\varepsilon$ étant choisie par l'utilisateur. Déterminer ainsi la plus petite valeur de $n$ pour laquelle $|u_n - \sqrt{2}| \leqslant 10^{-9}$, et comparer à la valeur obtenue avec l'IAF.
3. Écrire un programme demandant une valeur de $n$ à l'utilisateur et calculant le quotient $\dfrac{u_{k+1} - \sqrt{2}}{u_k - \sqrt{2}}$ (rapport des écarts entre deux termes consécutifs de la suite et la limite) pour tous les entiers $k$ inférieurs ou égaux à $n$.
4. Vers quelle valeur ce quotient semble-t-il converger ? Expliquer pourquoi ce quotient a effectivement une limite, et la déterminer mathémétiquement.

## Exercice 2

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{e^{u_n} - 1}$. Écrire un programme déterminant une valeur approchée à $\varepsilon$ près de sa limite, en utilisant la technique suivante : on calculera les termes de la suite jusqu'à obtenir $|u_{n+1} - u_n| \leqslant \varepsilon$, on admet qu'on a alors $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$.

Écrire ensuite un second programme ayant le même objectif, mais utilisant le fait que $|u_n - l| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ (on calculera donc en parallèle la valeur de $u_n$ et celle de $2^n$ jusqu'à obtenir la condition $\dfrac{1}{2^n} \leqslant \varepsilon$).