TD 14 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

25 mars 2011

Ce TD14 consacré aux simulations informatiques s'est finalement étendu sur trois séances, et nous avons programmé un peu plus que ce qui était demandé dans la feuille initiale. Voici donc les programmes réalisés au cours de ces séances :

- Simulation de n lancers de dés à k faces :

```
PROGRAM lancers;
USES wincrt;
VAR n,k,i,a : integer; t : ARRAY[0..99] OF integer;
BEGIN
Randomize;
WriteLn('Choisir le nombre de faces du dé');
ReadLn(k);
WriteLn('Choisir le nombre de lancers');
ReadLn(n);
FOR i := 0 TO k-1 DO t[i] := 0;
FOR i := 1 TO n DO
BEGIN
a := random(k);
t[a] := t[a]+1;
END;
FOR i := 0 TO k-1 DO WriteLn('On a obtenu ',t[i],' fois la face numéro ',i+1);
END.
```

- Simulation de n lancers de pièce déséquilibrée et comptage du nombre de Pile obtenus :

```
PROGRAM desequilibre;
USES wincrt;
VAR i,n,a : integer; p : real;
BEGIN
Randomize;
WriteLn('Choisir la proba de tomber sur Pile');
ReadLn(p);
WriteLn('Choisir le nombre de lancers');
ReadLn(n);
a := 0;
FOR i := 1 TO n DO
IF random<=p THEN a := a+1;
WriteLn('On a obtenu ',a,' Pile en ',n,' lancers.');
END.
```

- Et le même avec un nombre de simulations choisi par l'utilisateur pour tester des binômiales :

```
PROGRAM binomiale;
USES wincrt;
VAR i,n,a,j,m : integer; p : real; t : array[0..99] OF integer;
```

```
BEGIN
Randomize ;
WriteLn('Choisir la proba de tomber sur Pile') ;
ReadLn(p) ;
WriteLn('Choisir le nombre de lancers') ;
ReadLn(n) ;
WriteLn('Choisir le nombre de simulations') ;
ReadLn(m) ;
FOR i := 0 TO n DO t[i] := 0 ;
FOR j := 1 TO m DO
BEGIN
a := 0 ;
FOR i := 1 TO n DO
IF random<=p THEN a := a+1 ;
t[a] := t[a]+1 ;
END ;
FOR i := 0 TO n DO
WriteLn('On a obtenu ',t[i],' fois ',i,' Pile.') ;
END.
```

- Pour se reposer un peu entre deux lois usuelles, une simulation de lancers de deux dés, en regardant la somme des deux chiffres obtenus :

```
PROGRAM sommedes ;
USES wincrt ;
VAR n,i,a : integer ; t : ARRAY[2..12] OF integer ;
BEGIN
Randomize ;
WriteLn('Choisir le nombre de lancers') ;
ReadLn(n) ;
FOR i := 2 TO 12 DO t[i] := 0 ;
FOR i := 1 TO n DO
BEGIN
a := random(6)+random(6)+2 ;
t[a] := t[a]+1 ;
END ;
FOR i := 2 TO 12 DO WriteLn('On a obtenu ',t[i],' fois la somme ',i) ;
END.
```

- Le retour des lois usuelles avec des simulations d'hypergéométrique :

```
PROGRAM hypergeo ;
USES wincrt ;
VAR n,k,i,j,m,t,a : integer ; p,b : real ; t : ARRAY[0..99] OF integer ;
BEGIN
Randomize ;
WriteLn('Choisir les paramètres de la loi hypergéométrique') ;
ReadLn(m,n,p) ;
WriteLn('Choisir le nombre de simulations') ;
ReadLn(k) ;
FOR i := 0 T0 n DO t[i] := 0 ;
FOR j := 1 TO k DO
BEGIN
a := 0 ; t := m ; b := m*p ;
FOR i := 1 TO n DO
```

```
IF random(t) <b THEN
BEGIN
a := a+1 ; t := t-1 ; b :=b-1 ;
END
ELSE t := t-1 ;
t[a] := t[a]+1 ;
END ;
FOR i := 0 TO n DO WriteLn('On a obtenu ',t[i],' fois ',i,' boules blanches.') ;
END.
```

Pour ceux qui auraient besoin d'explications, les différentes variables représentent les choses suivantes : t est comme toujours le tableau servant à stocker le nombre de fois où chaque résultat a été obtenu ; m,n et p les paramètres de la loi (m est noté N dans notre cours de maths) ; k le nombre de simulations de cette loi qu'on a envie d'effectuer ; i et j sont des invariants de boucle (j pour la boucle des simulations, i pour la boucle des tirages à l'intérieur de chaque simulation) ; enfin, à l'intérieur de chaque simulation, t représente le nombre de boules restant dans l'urne après le i-ème tirage, b le nombre de boules blanches restant dans l'urne et a le nombre de boules blanches tirées jusqu'ici (variables réinitialisées à chaque simulation).

- Pour terminer, nous avons tenté d'étudier l'expérience aléatoire suivante : dans une urne se trouvent deux boules blanches et 18 noires. On tire toutes les boules de l'urne successivement sans remise et on note X et Y les variables aléatoires donnant les rangs des tirages des deux boules blanches (x étant le premier et Y le deuxième). Voici un programme effctuant un nombre de simulations de cette expérience choisi par l'utilisateur, stockant les valeurs obtenues dans deux tableaux (un pour X et un pour Y) et calculant les espérances de X et de Y :

```
PROGRAM deuxblanches ;
USES wincrt ;
VAR i,n,a,k : integer ; ex,ey : real ; tx,ty ; ARRAY[1..20] OF integer :
BEGIN
Randomize ;
WriteLn('Choisissez le nombre de simulations') ;
ReadLn(n) ;
FOR i := 1 TO 19 DO tx[i] := 0 ;
FOR i := 2 TO 20 DO ty[i] := 0 ;
FOR i := 1 TO n DO
BEGIN
k := 20 ;
WHILE random(k)>1 DO k := k-1 ;
tx[21-k] := tx[21-k]+1 ;
REPEAT k := k-1 UNTIL random(k)=0 ;
ty[21-k] := ty[21-k]+1 ;
END ;
ex := 0 ; ey := 0 ;
FOR i := 1 TO 19 DO ex := ex+i*tx[i]/n ;
FOR i := 2 TO 20 DO ey := ey+i*ty[i]/n ;
WriteLn(ex) ;
WriteLn(ey) ;
END.
```

Avec un nombre de simulations suffisamment élevé, on obtient des espérances proches de 7 et 14, ce qui correspond à dire qu'en moyenne, on va tirer 6 boules noires avant la première blanche, 6 boules noires après la deuxième blanche, et six boules noires entre les deux. Essayons de calculer l'espérance de X mathématiquement en déterminant sa loi. On a clairement $P(X =$

$1) = \dfrac{2}{20} = \dfrac{1}{10}$; puis $P(X=2) = \dfrac{18}{20} \times \dfrac{2}{19}$; $P(X=3) = \dfrac{18}{20} \times \dfrac{17}{19} \times \dfrac{2}{18} = \dfrac{17 \times 2}{20 \times 19}$; et plus généralement $P(X=k) = \dfrac{2(20-k)}{20 \times 19}$ (formule valable pour toutes les valeurs de k comprises entre 1 et 19, les plus courageux le démontreront proprement) ; d'où $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=19} \frac{2k(20-k)}{20 \times 19} = \sum_{k=1}^{k=19} \frac{2}{19}k - \frac{1}{190}k^2 = \frac{2}{19} \times \frac{19 \times 20}{2} - \frac{1}{190} \times \frac{19 \times 20 \times 39}{6} = 20 - \frac{39}{3} = 20 - 13 = 7$. Plutôt que de recommencer les calculs pour Y, on peut constater que $21 - Y$ suit la même loi que X en renversant l'ordre des tirages.