Interrogation Écrite n°3 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

13 octobre 2010

1. Rappeler la définition d'une partition d'un ensemble E.

   Une partition de E est un ensemble de sous-ensembles A_1, A_2, ..., A_n tels que $\bigcup A_i = E$ et $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\forall j \neq i$, $A_i \cap A_j = \emptyset$.

2. Déterminer le terme général de la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 2$.

   La suite est arithmético-géométrique, d'équation de point fixe $x = 3x + 2$, soit $x = -1$. On pose donc $v_n = u_n + 1$, et $v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = 3u_n + 3 = 3(u_n + 1) = 3v_n$. La suite (v_n) est géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = u_0 + 1 = 3$, donc $v_n = 3^{n+1}$, puis $u_n = v_n - 1 = 3^{n+1} - 1$.

3. Déterminer le terme général de la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$, $u_1 = \dfrac{10}{3}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $3u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n$.

   La suite est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $3x^2 - 4x + 1 = 0$. Celle-ci a pour discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$, et admet donc deux racines $r = \dfrac{4+2}{6} = 1$, et $s = \dfrac{4-2}{6} = \dfrac{1}{3}$. On peut donc écrire $u_n = \alpha + \dfrac{\beta}{3^n}$, avec au vu des valeurs initiales $\alpha + \beta = 2$ et $\alpha + \dfrac{\beta}{3} = \dfrac{10}{3}$, soit $3\alpha + \beta = 10$. En faisant la différene des deux on obtient $2\alpha = 8$, soit $\alpha = 4$, puis $\beta = -2$. Finalement, $u_n = 4 - \dfrac{2}{3^n}$.

4. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{2u_n + 1}$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n = \dfrac{2u_n - 3}{2u_n + 2}$. Montrer que la suite (t_n) est géométrique, puis en déduire la valeur de t_n puis celle de u_n.

   Calculons donc $t_{n+1} = \dfrac{2u_{n+1} - 3}{2u_{n+1} + 2} = \dfrac{\frac{4u_n+6}{2u_n+1} - 3}{\frac{4u_n+6}{2u_n+1} + 2} = \dfrac{4u_n + 6 - 6u_n - 3}{4u_n + 6 + 4u_n + 2} = \dfrac{-2u_n + 3}{8u_n + 8} = -\dfrac{1}{4}t_n$. La suite (t_n) est donc géométrique de raison $-\dfrac{1}{4}$ et de premier terme $t_0 = \dfrac{2u_0 - 3}{2u_0 + 2} = -\dfrac{1}{4}$, donc $t_n = \left(-\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}$. Comme $t_n(2u_n + 2) = 2u_n - 3$, on a $u_n(2t_n - 2) = -3 - 2t_n$, soit $u_n = \dfrac{3 + 2t_n}{2 - 2t_n} = \dfrac{3.4^{n+1} + 2(-1)^{n+1}}{2.4^{n+1} + 2(-1)^{n+1}}$.