Devoir Maison n°6 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

27 avril 2011

Problème 1 (Bac C 1993)

Partie A.

1. La fonction h_1 est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$, de dérivée $h_1'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$. Cette dérivée s'annule pour $x = 1$, la fonction h_1 est donc décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$. Elle admet pour minimum global $h_1(1) = 1$, donc est bien strictement positive sur $]0;+\infty[$.
2. Au vu de la question précédente, le dénominateur de f_1 ne s'annule jamais sur $]0;+\infty[$, et f_1 est donc définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle (quotient de fonction usuelles). Elle admet pour dérivée $f_1'(x) = \frac{x - \ln x - x(1-\frac{1}{x})}{(x-\ln x)^2} = \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}$. Cette dérivée est du signe de $1 - \ln x$, qui s'annule pour $x = e$. La fonction f_1 est croissante sur $]0;e]$ et décroissante sur $[e;+\infty[$. Elle admet un maximum global pour $x = e$, de valeur $f_1(e) = \frac{e}{e-1}$.

   En $+\infty$, on a $f_1(x) \sim \frac{x}{x}$ (croissance comparée), donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 1$ (asymptote horizontale). En 0, pas de problème, il n'y a pas de forme indéterminée, et $\lim\limits_{x\to 0} f_1(x) = 0$. D'où le tableau suivant :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{e}{e-1}$	$\searrow$	1

3. Le fait qu'il s'agisse d'un prolongement par continuité découle directement du calcul de la limite en 0. Pour la dérivée, cherchons à applpiquer le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$: la fonction est donc continue sur $[0;+\infty[$, $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$, reste la limite de f_1' en 0 : $f_1'(x) = \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2} \underset{0}{\sim} \frac{-\ln x}{(-\ln x)^2} \sim -\frac{1}{\ln x}$. Cette dérivée a pour limite 0 en 0, la fonction φ_1 est donc $\mathcal{C}^1$ sur $[0;+\infty[$, et $\varphi_1'(0) = 0$ (tangente horizontale).

Partie B.

1. Comme dans la première partie, la fonction est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$, de dérivée $h_n'(x) = nx^{n-1} - \frac{1}{x} = \frac{nx^n - 1}{x}$. Cette dérivée s'annule lorsque $x^n = \frac{1}{n}$, c'est-à-dire $x = \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}$. Cette valeur appartenant à $]0;1[$, son image par h_n est positive : au dénominateur, on a $1 - \ln\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}\right) > 0$. On en déduit la stricte positivité de h_n.

2. La fonction g_n est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$, et $g_n'(x) = n(1-n)x^{n-1} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{n(1-n)x^n - 1}{x}$. Puisque $n \geqslant 2$, le numérateur de cette dérivée est toujours négatif, et la fonction g_n est donc strictement croissante. Comme g_n a pour limite $+\infty$ en 0 (pas de forme indéterminée ici), et $-\infty$ en $+\infty$ (pas de forme indéterminée non plus !), g_n est donc bijective de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$, et s'annule une fois.

   Pour comparer a_n et 1, il suffit de calculer $g_n(1) = 2 - n \leqslant 0$. On a donc $a_n \leqslant 1$. Pour $n = 2$, on constate que g_2 s'annule en 1, donc $a_2 = 1$.

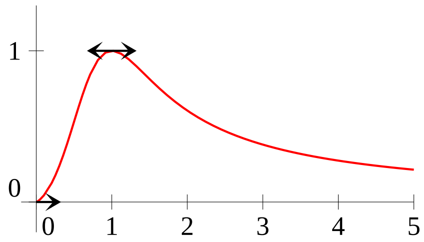
3. (a) Calculons donc (la fonction est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ puisque son dénominateur ne s'y annule pas) : $f_n'(x) = \dfrac{x^n - \ln x - x(nx^{n-1} - \frac{1}{x})}{(x^n - \ln x)^2} = \dfrac{x^n - \ln x - nx^n + 1}{(x^n - \ln x)^2} = \dfrac{g_n(x)}{(x^n - \ln x)^2}$. La fonction f_n est donc strictement croissante sur $]0;a_n]$, et décroissante sur $[a_n;+\infty[$.

   (b) En 0, la limite vaut toujours 0 sans problème. En $+\infty$, on a désormais une fonction équivalent à $\dfrac{x}{x^n}$, qui tend donc vers 0. D'où un tableau ressemblant à ceci :

x	0		a_n		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f_n(a_n)$	$\searrow$	0

4. (a) On fait exactement la même chose que dans la première partie : puisque la fonction tend vers 0 en 0, on prolonge par continuité en posant $\varphi_n(0) = 0$. Il ne reste qu'à calculer la limite de la dérivée pour appliquer le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$: tout comme pour f_1', $f_n'(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{-\ln x}{(-\ln x)^2}$, donc la dérivée a pour limite 0, et φ_n est donc dérivable en 0, avec une tangente horizontale à l'origine.

   (b) Pour φ_2, on peut calculer la valeur du maximum puisqu'on sait que $a_2 = 1$: $f_2(1) = 1$. On obtient une courbe ressemblant à ceci :



Partie C.

1. Puisque h_1 est croissante sur $[1;3]$, on a $\forall x \in [1;3]$, $x - \ln x \in [1; 3 - \ln 3]$, donc $\dfrac{1}{3 - \ln 3} \leqslant \dfrac{1}{(x - \ln x)^2} \leqslant 1$. Sur ce même intervalle, on a $1 - \ln 3 \leqslant 1 - \ln x \leqslant 1$. Il faut faire très attention, avant de multiplier les encadrements, au fait que dans le dernier, on a $1 - \ln 3 \leqslant 0$. Sur l'intervalle $[1;e]$, où tout est positif, on a donc $0 \leqslant f_1'(x) \leqslant 1$, mais sur $[e, 1]$, on obtient $\dfrac{1 - \ln 3}{1} \leqslant f'(x) \leqslant 0$. Peu importe, puisque ce minorant négatif est plus grand que -1, ce qui permet tout de même de conclure que $|f_1'(x)| \leqslant 1$.

2. (a) Il suffit d'utiliser l'inégalité démontrée juste au-dessus, sous la forme $-1 \leqslant f_1'(x) \leqslant 1$, pour prouver que, $\forall (\alpha, x) \in [1;3]^2$ tels que $\alpha \leqslant x$ (tout cela fait bien partie des hypothèses de l'énoncé), $-1(x-\alpha) \leqslant f_1(x) - f_1(\alpha) \leqslant 1(x-\alpha)$. Ceci est bien l'encadrement demandé.

   (b) Il ne reste plus qu'à intégrer l'inégalité précédente : $\int_\alpha^\beta (\alpha - x)dx \leqslant A - J \leqslant \int_\alpha^\beta (x-\alpha)dx$. Ensuite, on sépare simplement l'intégrale du milieu en deux via la linéarité de l'intégrale.

   (c) Calculons l'intégrale de droite $\int_\alpha^\beta (x-\alpha)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \alpha x\right]_\alpha^\beta = \frac{\beta^2}{2} - \frac{\alpha^2}{2} - \alpha\beta + \alpha^2 = \frac{\beta^2 + \alpha^2 - 2\alpha\beta}{2} = \frac{(\beta-\alpha)^2}{2}$. L'intégrale de gauche étant simplement l'opposé de celle-ci, on obtient bien $|A - J| \leqslant \frac{(\beta-\alpha)^2}{2}$.

3. En utilisant les résultats des questions précédentes, on aura $\forall k \in \{0; 1; \dots; n-1\}$, $|A_k - J_k| \leqslant \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{2} = \frac{2}{n^2}$. Or, on a $A = A_0 + A_1 + \cdots + A_{n-1}$. On peut donc écrire $|A - (J_0 + J_1 + \cdots + J_{n-1})| = |(A_0 - J_0) + (A_1 - J_1) + \cdots + (A_{n-1} - J_{n-1})| \leqslant |A_0 - J_0| + \cdots + |A_{n-1} - J_{n-1}| \leqslant n \times \frac{2}{n^2} = \frac{2}{n}$ (on a utilisé l'inégalité triangulaire au milieu de calcul).
   Au vu de cette inégalité, on sait que $J_0 + J_1 + \cdots + J_{n-1}$ sera une valeur approchée à 0.1 près de A dès que $\frac{2}{n} \leqslant 0.1$, c'est-à-dire pour $n \geqslant 20$. Prenons donc $n = 20$, on a alors $x_0 = 1$; $x_1 = 1.1$, $x_2 = 1.2$, …, $x_{19} = 2.9$, et $A \simeq J_0 + J_1 + \cdots + J_{19} = \int_1^{1.1} f_1(1)dx + \cdots + \int_{2.9}^3 f_1(2.9)dx = 0.1(f_1(1) + f_1(1.1) + \cdots + f_1(2.9))$. Si on a une calculatrice sous la main, on peut calculer $A \simeq 2.9$.

Problème 2 (HEC 2008)

1. Appliquons donc dans la joie et la bonne humeur le pivot de Gauss à notre matrice R :

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_4 \leftarrow L_4 + L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow 6L_1 - 5L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 - L_4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1/6 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3/6 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice R est bien inversible, d'inverse $R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. (a) C'est un calcul peu passionnant : $R^{-1}S = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ 9 & 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}$, puis $R^{-1}SR = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

   (b) Notons D la matrice diagonale calculée à la question précédente, et prouvons par récurrence que $S^n = RD^nR^{-1}$: c'est vrai pour $n = 1$, car $S = R(R^{-1}SR)R^{-1} = RDR^{-1}$; en supposant la formule exacte au rang n, on a ensuite $S^{n+1} = S \times S^n = (RDR^{-1})(RD^nR^{-1}) = RD^{n+1}R^{-1}$. On en déduit donc que $S^n = R \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9^n \end{pmatrix} R^{-1}$, soit

$$S^n = \begin{pmatrix} 9^n & 9^n - 5^n & 9^n - 5^n & 9^n \\ 0 & \frac{(-1)^n + 5^{n+1}}{6} & \frac{5^{n+1} - 5(-1)^n}{6} & 0 \\ 0 & \frac{5^n - (-1)^n}{6} & \frac{5^n + 5(-1)^n}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. (a) Si personne n'est contagieux au jour n (c'est ce que signifie $X_n = 0$), personne ne le sera au jour $n + 1$ (puisque personne n'aura pu être contaminé), soit $P_{X_n=0}(X_{n+1} = 0) = 1$, et $P_{X_n=0}(X_{n+1} = 1) = P_{X_n=0}(X_{n+1} = 2) = P_{X_n=0}(X_{n+1} = 3) = 0$.

(b) Si tout les individus sont contagieux au jour n (hypothèse $X_n = 3$), d'après l'énoncé, ils seront tous sains le jour $n+1$ donc $P_{X_n=3}(X_{n+1} = 0) = 1$ et $P_{X_n=3}(X_{n+1} = 1) = P_{X_n=3}(X_{n+1} = 2) = P_{X_n=3}(X_{n+1} = 3) = 0$.

(c) Si on suppose $X_n = 1$ réalisé, il y a donc un individu contagieux au jour n et deux individus sains. Chacun de ces deux individus a donc une probabilité $p = \dfrac{1}{3}$ de devenir contagieux (indépendemment l'un de l'autre), le nombre de personnes contaminées suivra donc bien une loi binômiale de paramètre $\left(2; \dfrac{1}{3}\right)$.

Si $X_n = 2$, il y a cette fois-ci un seul individu sain (et donc suscptible d'être contaminé), donc X_{n+1} suivra une loi de Bernouilli. Reste à déterminer son paramètre, c'est-à-dire la probabilité que l'individu sain soit contaminé, sachant qu'il a deux possibilités de se faire contaminer puisqu'il y a deux malades. Autrement dit, la probabilité qu'il ne soit **pas** contaminé vaut $\left(1 - \dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9}$. La loi de X_{n+1} sera donc bien binômiale de paramètre $\left(1; \dfrac{5}{9}\right)$.

(d) D'après la question précédente, il s'agit simplement de calculer des espérances de lois binômiales, donc $E_{X_n=1}(X_{n+1}) = 2 \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$ et $E_{X_n=2}(X_{n+1}) = \dfrac{5}{9}$.

4. (a) On a donc la loi suivante pour X_0 : $P(X_0 = 0) = \binom{3}{0}\left(\dfrac{1}{3}\right)^0\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{8}{27}$; $P(X_0 = 1) = \binom{3}{1}\left(\dfrac{1}{3}\right)^1\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{12}{27} = \dfrac{4}{9}$; $P(X_0 = 2) = \binom{3}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^1 = \dfrac{2}{9}$ et $P(X_0 = 3) = \binom{3}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\left(\dfrac{2}{3}\right)^0 = \dfrac{1}{27}$. Les quatre évènements dont on vient de calculer les probabilités forment un système complet d'évènements, on peut appliquer (quatre fois) la formule des probabilités totales pour déterminer la loi de X_1.

Commençons par préciser les probabilités conditionnelles manquantes : au vu de la question c, $P_{X_n=2}(X_{n+1} = 0) = \dfrac{4}{9}$; $P_{X_n=2}(X_{n+1} = 1) = \dfrac{5}{9}$ et $P_{X_n=2}(X_{n+1} = 2) = P_{X_n=2}(X_{n+1} = 3) = 0$; et $P_{X_n=1}(X_{n+1} = 0) = \binom{2}{0} \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^0\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9}$; $P_{X_n=1}(X_{n+1} = 1) = \binom{2}{1} \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9}$ et $P_{X_n=1}(X_{n+1} = 2) = \dfrac{1}{9}$.

On a donc $P(X_1 = 0) = P(X_0 = 0) \times P_{X_0=0}(X_1 = 0) + P(X_0 = 1) \times P_{X_0=1}(X_1 = 0) + P(X_0 = 2) \times P_{X_0=2}(X_1 = 0) + P(X_0 = 3) \times P_{X_0=3}(X_1 = 0) = \dfrac{8}{27} \times 1 + \dfrac{4}{9} \times \dfrac{4}{9} + \dfrac{2}{9} \times \dfrac{4}{9} + \dfrac{1}{27} \times 1 = \dfrac{51}{81}$. De même, $P(X_1 = 1) = \dfrac{8}{27} \times 0 + \dfrac{4}{9} \times \dfrac{4}{9} + \dfrac{2}{9} \times \dfrac{5}{9} + \dfrac{1}{27} \times 0 = \dfrac{26}{81}$; $P(X_1 = 2) = \dfrac{8}{27} \times 0 + \dfrac{4}{9} \times \dfrac{1}{9} + \dfrac{2}{9} \times 0 + \dfrac{1}{27} \times 0 = \dfrac{4}{81}$, et $P(X_1 = 3) = 0$ (toutes les probabilités conditionnelles sont nulles). Résumons tout cela dans un tableau :

k	0	1	2	3
$P(X_1 = k)$	$\frac{51}{81}$	$\frac{26}{81}$	$\frac{4}{81}$	0

D'où une espérance $E(X_1) = \dfrac{26 + 2 \times 4}{81} = \dfrac{34}{81}$.

(b) Calculons la somme en question en reprenant les résultats de la question $3.d)$: $\displaystyle\sum_{i=0}^{i=3} E_{X_0=i}(X_1) \times P(X_0 = i) = 0 \times \dfrac{8}{27} + \dfrac{2}{3} \times \dfrac{4}{9} + \dfrac{5}{9} \times \dfrac{2}{9} + 0 \times \dfrac{1}{27} = \dfrac{34}{81}$, l'égalité est vérifiée.

5. (a) Les quatre évènements formant un système complet, on aura $u_n + v_n + w_n + t_n = 1$.

(b) D'après la formule des probabilités totales,

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} P_{X_n=0}(X_{n+1}=0) & P_{X_n=1}(X_{n+1}=0) & P_{X_n=2}(X_{n+1}=0) & P_{X_n=3}(X_{n+1}=0) \\ P_{X_n=0}(X_{n+1}=1) & P_{X_n=1}(X_{n+1}=1) & P_{X_n=2}(X_{n+1}=1) & P_{X_n=3}(X_{n+1}=1) \\ P_{X_n=0}(X_{n+1}=2) & P_{X_n=1}(X_{n+1}=2) & P_{X_n=2}(X_{n+1}=2) & P_{X_n=3}(X_{n+1}=2) \\ P_{X_n=0}(X_{n+1}=3) & P_{X_n=1}(X_{n+1}=3) & P_{X_n=2}(X_{n+1}=3) & P_{X_n=3}(X_{n+1}=3) \end{pmatrix} U_n,$$

c'est-à-dire que $M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & 1 \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{5}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) On constate simplement que $M = \frac{1}{9}S$, donc $M^n = \frac{1}{9^n}S^n$.

(d) Une petit récurrence permet de prouver que $U_n = M^n U_0$ (en effet, c'est trivialement vrai pour $n = 0$, et si on le suppose au rang n, alors $U_{n+1} = MU_n = M(M^n U_0) = M^{n+1}U_0$), donc en effectuant le produit matriciel sur les deux premières lignes, $u_n = \frac{1}{9^n}(9^n u_0 + (9^n - 5^n)v_0 + (9^n - 5^n)w_0 + 9^n t_0) = u_0 + v_0 + w_0 + t_0 - \left(\frac{5}{9}\right)^n (v_0 + w_0) = 1 - \left(\frac{5}{9}\right)^n (v_0 + w_0)$; et $v_n = \frac{1}{9^n}\left(\frac{(-1)^n + 5^{n+1}}{6}v_0 + \frac{5^{n+1} - 5(-1)^n}{6}w_0\right) = \frac{5^{n+1}(v_0 + w_0) + (-1)^n(v_0 - 5w_0)}{6 \times 9^n}$.

6. (a) Les évènements $(X_n = 0)$ forment une suite croissante d'évènements (puisque $X_n = 0 \Rightarrow X_{n+1} = 0$, dont l'union représente toutes les situations où l'épidémie finira par être éradiquée (puisque, si $X_n = 0$, plus personne ne retombera malade).

(b) On n'a pas encore vu en cours le théorème de la limite monotone, qui dit que pour une suite croissante d'évènements, la probabilité de l'union est égale à la limite des probabilités, mais c'est assez intuitif : puisque $X_n = 0$ recouvre de plus en plus de cas et que l'union de tous ces cas représente l'éradiction de la maladie, la probabilité u_n va se rapprocher quand n tend vers $+\infty$ de celle que la maladie soit éradiquée. Autre façon de voir les choses : u_n représente la probabilité que la maladie soit éradiquée en moins de n jours. En prenant la limite, on obtient la probabilité que la maladie soit éradiquée, sans préciser le temps à attendre. Au vu de la formule obtenue et du fait que $\frac{5}{9} \in]-1;1[$, cette limite vaut 1 quelles que soient les valeurs de v_0 et w_0 (et a fortiori de u_0 et t_0 qui n'interviennent pas dans l'expression de u_n), ce qui signifie bien que le virus disparait presque sûrement, indépendamment de la loi de X_0.