Devoir Maison n°6

ECE3 Lycée Carnot

27 avril 2011

Problème 1 (bac C 1993)

Partie A.

1. Étudier sur l'intervalle $]0;+\infty[$ le sens de variation de la fonction h_1 définie par $h_1(x) = x - \ln(x)$.
   Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$ on a $h_1(x) > 0$.
   On définit alors sur l'intervalle $]0;+\infty[$ la fonction f_1 par $f_1(x) = \dfrac{x}{x - \ln(x)}$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f_1.
   Déterminer les limites de f_1 aux bornes de l'intervalle $]0;+\infty[$.
   Dresser le tableau de variations de f_1.
3. On considère la fonction φ_1 définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $\begin{cases} \varphi_1(0) & = & 0 \\ \varphi_1(x) & = & f_1(x) \quad \text{si } x > 0 \end{cases}$
   Montrer que φ_1 est un prolongement par continuité de f_1 et étudier la dérivabilité de φ_1 en 0.

Partie B.

Dans cette partie, n désigne un entier naturel supérieur où égal à 2.

1. Étudier sur l'intervalle $]0;+\infty[$ le sens de variation de la fonction h_n définie par $h_n(x) = x^n - \ln(x)$.
   En déduire que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$ on a : $h_n(x) > 0$.
   On définit alors sur l'intervalle $]0;+\infty[$ la fonction f_n par $f_n(x) = \dfrac{x}{x^n - \ln(x)}$.
2. On définit sur l'intervalle $]0;+\infty[$ la fonction g_n par $g_n(x) = 1 + (1-n)x^n - \ln(x)$.
   Montrer que g_n est strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   En déduire l'existence d'un réel unique a_n tel que : $g_n(a_n) = 0$.
   Comparer a_n et 1. Quelle est la valeur de a_2 ?
3. (a) Démontrer que pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$, on a $f_n'(x) = \dfrac{g_n(x)}{(x^n - \ln(x))^2}$.
   En déduire le sens de variation de f_n.
   (b) Préciser les limites de f_n aux bornes de $]0;+\infty[$ et dresser le tableau des variations de f_n.
4. (a) En vous aidant la la question 3 de la partie A., montrer que f_n admet un prolongement par continuité φ_n dérivable sur $[0;+\infty[$.
   (b) Tracer la représentation graphique $\mathcal{C}_2$ de φ_2 dans un repère orthonormé (unité 4 cm).

Partie C.

Calcul approché de l'intégrale $\displaystyle\int_1^3 f_1(x)dx$ par la méthode des rectangles.

1. En utilisant la question A.1, déterminer lorsque x appartient à l'intervalle $[1;3]$, un encadrement de $x-\ln(x)$. En déduire que pour tout x de l'intervalle $[1;3]$, on a $|f_1'(x)| \leqslant 1$.
2. On considère deux nombres réels α et β tels que $1 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 3$ et on pose $A = \displaystyle\int_1^3 f_1(x)dx$ et $J = \displaystyle\int_1^3 f_1(\alpha)dx$.
   (a) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[\alpha;\beta]$, on a $\alpha - x \leqslant f_1(x) - f_1(\alpha) \leqslant x - \alpha$.
   (b) En déduire que $\displaystyle\int_\alpha^\beta (\alpha - x)dx \leqslant A - J \leqslant \int_\alpha^\beta (x-\alpha)dx$.
   (c) Montrer que $|A - J| \leqslant \dfrac{1}{2}(\beta-\alpha)^2$.
3. On partage l'intervalle $[1;3]$ en n intervalles de même longueur en utilisant les réels $x_0, x_1, \ldots, x_n$ tels que $1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 3$. On a donc $x_{k+1} - x_k = \dfrac{2}{n}$ pour k appartenant à $\{0;1;\ldots;n-1\}$. On pose $A_k = \displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f_1(x)dx$ et $J_k = \displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} f_1(x_k)dx$.
   Démontrer que $\left|\displaystyle\int_1^3 f_1(x)dx - (J_0 + J_1 + \cdots + J_{n-1})\right| \leqslant \dfrac{2}{n}$.
   En déduire une valeur approchée de $\displaystyle\int_1^3 f_1(x)dx$ à 10^{-1} près. On légitimera le choix de n.

Problème 2 (adapté de HEC 2008)

Dans tout le problème, N désigne un entier naturel fixé supérieur ou égal à 2, et p un réel fixé de l'intervalle $]0,1[$. On pose : $q = 1-p$. Soit n un entier naturel quelconque.
Dans une population de N individus, on s'intéresse à la propagation d'un certain virus. Chaque jour, on distingue dans cette population deux catégories d'individus : en premier lieu, les individus sains, c'est-à-dire ceux qui ne sont pas porteurs du virus, et les individus contaminés par le virus et qui sont contagieux. Ces catégories évoluent jour après jour selon le modèle suivant :

- chaque jour n, chaque individu sain peut être contaminé par n'importe lequel des individus contagieux ce jour avec la même probabilité p, ces contaminations éventuelles étant indépendantes les unes des autres.
- un individu contaminé le jour n devient contagieux le jour $n+1$.
- chaque individu contagieux le jour n redevient sain le jour $n+1$.

On note alors X_n le nombre aléatoire d'individus contagieux le jour n. On remarquera que si, pour un certain entier naturel i, on a $X_i = 0$, alors on a aussi $X_{i+1} = 0$.

Partie I. Un cas particulier

Dans cette partie uniquement, on suppose que l'on a : $N = 3$ et $p = \dfrac{1}{3}$. On considère les matrices

$$S = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 4 & 9 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la matrice R est inversible et calculer son inverse R^{-1}.

2. (a) Calculer le produit matriciel $R^{-1}SR$.

   (b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$ l'expression de la matrice S^n.

3. Soit n un entier fixé de $\mathbb{N}$.

   (a) Déterminer, pour tout entier k, la probabilité conditionnelle de $P_{X_n=0}(X_{n+1}=k)$.

   (b) Déterminer, pour tout entier k, la probabilité conditionnelle de $P_{X_n=3}(X_{n+1}=k)$.

   (c) Vérifier qu'en supposant l'évènement $X_n = 1$ réalisé (respectivement $X_n = 2$ réalisé), la loi de X_{n+1} est la loi binomiale de paramètres $\left(2, \dfrac{1}{3}\right)$ (resp. $\left(1, \dfrac{5}{9}\right)$).

   (d) On note $E_{X_n=i}(X_{n+1})$ l'espérance de la loi obtenue pour la variable X_{n+1} en supposant vérifié l'évènement $X_n = i$. Déterminer les valeurs respectives de $E_{X_n=1}(X_{n+1})$ et $E_{X_n=2}(X_{n+1})$.

4. On suppose, uniquement dans cette question, que X_0 suit la loi binomiale de paramètre $\left(3, \dfrac{1}{3}\right)$.

   (a) Déterminer la loi de X_1 et calculer $E(X_1)$.

   (b) Vérifier la formule suivante : $E\left(X_1\right) = \displaystyle\sum_{i=0}^{i=3} E_{X_0=i}(X_1) \times P(X_0 = i)$.

5. Pour tout entier naturel n, on définit la matrice $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \\ t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \end{pmatrix}$.

   (a) Déterminer une relation entre u_n, v_n, w_n et t_n.

   (b) À l'aide de la formule des probabilités totales, déterminer une matrice $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que : $U_{n+1} = MU_n$.

   (c) Exprimer M en fonction de S. En déduire les puissances de M.

   (d) Donner l'expression des réels u_n et v_n en fonction de n, v_0 et w_0.

6. On pose : $F = \displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} (X_n = 0)$.

   (a) Que représente l'évènement F ?

   (b) Montrer que le virus finit par disparaître avec probabilité 1, quelle que soit la loi de la variable aléatoire initiale X_0.