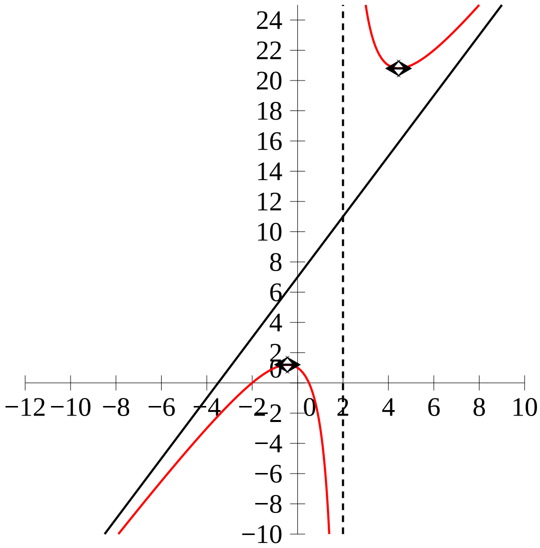
Devoir Maison n°5 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

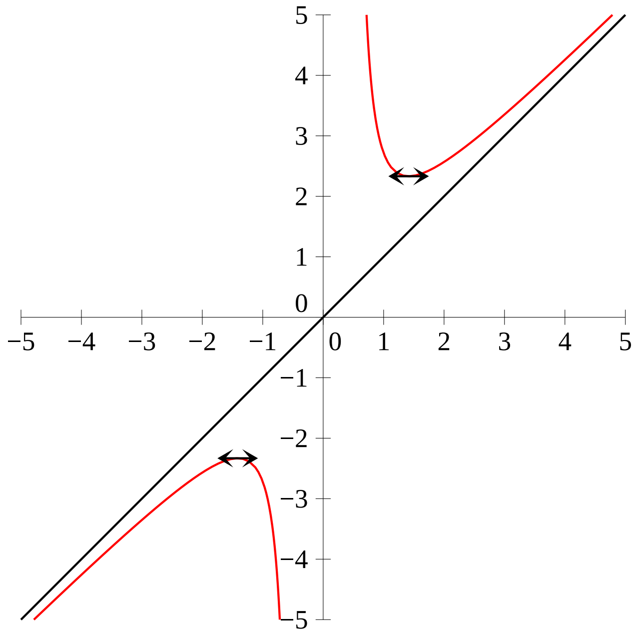
2 mars 2011

Exercice 1

- Commençons comme toujours par le domaine de définition : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$.
Quand x tend vers 2, le numérateur tend vers 12, donc $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$.
Pour les branches infinies, $f(x) \underset{\pm\infty}{\sim} 2x$, donc les limites sont bien infinies. De plus, $\dfrac{f(x)}{x} \underset{\pm\infty}{\sim} 2$.
Reste à calculer $f(x) - 2x = \dfrac{2x^2+3x-2-2x(x-2)}{x-2} = \dfrac{7x-2}{x-2}$, donc $f(x)-2x \underset{\pm\infty}{\sim} 7$. La droite d'équation $y = 2x+7$ est donc asymptote oblique à la courbe en $+\infty$ et en $-\infty$. La position relative de la courbe par rapport à l'asymptote oblique est obtenue en étudiant le signe de $f(x)-2x-7 = \dfrac{7x-2}{x-2} - 7 = \dfrac{12}{x-2}$. La courbe est donc en-dessus de l'asymptote sur $]-\infty;2[$, et au-dessous sur $[2;+\infty[$.
Le signe de f est obtenu en étudiant celui du numérateur, trinome dont le discriminant vaut $\Delta = 9+16 = 25$, et admet pour racines $x_1 = \dfrac{-3-5}{4} = -2$ et $x_2 = \dfrac{-3+5}{4} = \dfrac{1}{2}$. La courbe coupe donc l'axe des abscisses aux points d'abscisses -2 et $\dfrac{1}{2}$. Elle est en-dessous de l'axe sur $]-\infty;-2]$ (ne pas oublier de tenir compte du $x-2$ au dénominateur pour le signe, un petit tableau de signe peut être prudent) et sur $\left[\dfrac{1}{2};2\right[$, et au-dessus sur $\left[-2;\dfrac{1}{2}\right]$ et sur $]2;+\infty[$.
Passons aux variations, on a $f'(x) = \dfrac{(4x+3)(x-2)-(2x^2+3x-2)}{(x-2)^2} = \dfrac{2x^2-8x-4}{(x-2)^2}$. Cette dérivée est du signe de x^2-4x-2 (en factorisant le numérateur par 2), trinôme de discriminant $\Delta = 16+8 = 24$, admettant pour racines $x_3 = \dfrac{4-\sqrt{24}}{2} = 2-\sqrt{6}$, et $x_4 = \dfrac{4+\sqrt{24}}{2} = 2+\sqrt{6}$. Pour situer tout cela par rapport aux autres valeurs déjà calculées, x_4 est manifestement supérieure à 2, et x_3 se situe entre x_1 et x_2 (puisque $\sqrt{6}$ est comprise entre 2 et 3). La fonction f est croissante sur $]-\infty;x_3]$ et sur $[x_4;+\infty[$, et décroissante sur $[x_3;2[$ et $]2;x_4]$. Elle admet un maximum local en x_3, de valeur $f(2-\sqrt{6}) = \dfrac{2(2-\sqrt{6})^2+3(2-\sqrt{6})-2}{2-\sqrt{6}-2} = \dfrac{8-8\sqrt{6}+12+6-3\sqrt{6}-2}{-\sqrt{6}} = \dfrac{11\sqrt{6}-24}{\sqrt{6}} = 11-4\sqrt{6}$. Il y a également un minimum local en x_4 de valeur $f(2+\sqrt{6}) = \dfrac{2(2+\sqrt{6})^2+3(2+\sqrt{6})-2}{2+\sqrt{6}-2} = \dfrac{8+8\sqrt{6}+12+6+3\sqrt{6}-2}{\sqrt{6}} = \dfrac{11\sqrt{6}+24}{\sqrt{6}} = 11+4\sqrt{6}$ Tout cela nous donne une courbe ressemblant à ceci :



- La fonction g est définie sur $\mathbb{R}^*$ (le dénominateur ne peut pas s'annuler, mais encore faut-il que ce qui est dans l'exponentielle soit défini). Constatons au passage que $g(x) = xe^{\frac{1}{x^2}}$, ce qui est plus facile à manier pour la suite.
  Quand x tend vers 0, $\dfrac{1}{x^2}$ tend toujours vers $+\infty$, donc l'exponentielle tend vers $+\infty$. On a une belle forme indéterminée, qui se résoud à coups de croissance comparée. Pour faire les choses rigoureusement, on pose $X = \dfrac{1}{x^2}$ et on a alors $g(x) = \dfrac{e^X}{\sqrt{X}}$, et l'exponentielle l'emporte. On a donc $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = -\infty$ (à cause du signe de x).
  En $+\infty$ comme en $-\infty$, $e^{\frac{1}{x^2}}$ tend vers 1, donc les limites de f sont infinies, mais $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{\frac{1}{x^2}} = 1$. Calculons donc $f(x) - x = x(e^{\frac{1}{x^2}} - 1)$. Comme $\dfrac{1}{x^2}$ tend vers 0 quand x tend vers un infini, on peut utiliser l'équivalent classique $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$ pour obtenir $f(x) - x \underset{x \to \pm\infty}{\sim} x \times \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{x}$. Cet équivalent ayant pour limite 0, la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe en $+\infty$ et en $-\infty$. La position relative est donnée par le signe de $x(e^{\frac{1}{x^2}} - 1)$. Comme $\dfrac{1}{x^2} > 0$, la parenthèse est positive, donc $f(x) - x$ est du signe de x. Autrement dit, la courbe est en-dessous de l'asymptote sur $]-\infty; 0[$ et au-dessus sur $]0; +\infty[$.
  Le signe ne pose ici aucun problème puisque g est du signe de x, autrement dit négative sur $]-\infty; 0[$ et positive sur $]0; +\infty[$.
  Pour les variations, $g'(x) = e^{\frac{1}{x^2}} - x \times \dfrac{2}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}} = \dfrac{x^2 - 2}{x^2} e^{\frac{1}{x^2}}$. La fonction g est donc croissante sur $]-\infty; -\sqrt{2}]$ et sur $[\sqrt{2}; +\infty[$, et décroissante sur $[-\sqrt{2}; 0[$ et sur $[0; \sqrt{2}[$. Elle admet un maximum local en $-\sqrt{2}$, de valeur $g(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}e^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{2e}$; et un minimum local en $\sqrt{2}$ de valeur $g(\sqrt{2}) = \sqrt{2e}$. Autre chose à signaler ? Oui, bien sûr, la fonction g est clairement impaire, ce qui aurait pu nous éviter la moitié des calculs. Pour terminer, la courbe :



Exercice 2

1. (a) La fonction f_n est dérivable sur son domaine de définition, et $f_n'(x) = 1 - \frac{n}{x} = \frac{x-n}{x}$. Cette dérivée est du signe de $x - n$ et s'annule donc pour $x = n$. La fonction f admet un minimum global en n, de valeur $f_n(n) = n - n \ln n = n(1 - \ln n)$. De plus, on a $\lim\limits_{x \to 0} f_n(x) = +\infty$ (pas de forme indéterminée), et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ par croissance comparée. Enfin, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \frac{n \ln x}{x} = 0$ (toujours de la croissance comparée), et enfin $f_n(x) - x = -n \ln x$ tend vers $-\infty$, donc il y a en $+\infty$ une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = x$. Voici le tableau de variations de f_n :

x	0		n		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$n(1 - \ln n)$	$\nearrow$	$+\infty$

   (b) Si $n \geqslant 3$, $1 - \ln n < 0$, donc la fonction f_n s'annule une fois sur $]0; n[$, et une autre fois sur $]n; +\infty[$, d'où le résultat demandé.

2. (a) Calculons donc $f_n(1) = 1 - n \ln 1 = 1 > 0$, et $f_n(e) = e - n \ln e = e - n$. Si $n \geqslant 3$, $e - n < 0$, donc (en utilisant les théorème des valeurs intermédiaires par exemple, ou plus simplement en observant le tableau de variations de f_n), f_n s'annule entre 1 et e, d'où $1 < u_n < e$.

   (b) Calculons à nouveau : $f_n(u_{n+1}) = u_{n+1} - n \ln(u_{n+1})$. Or, par définition de u_{n+1}, on a $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$, c'est-à-dire que $u_{n+1} - (n+1) \ln u_{n+1} = 0$, ou encore $u_{n+1} = (n+1) \ln(u_{n+1})$. On en déduit que $f_n(u_{n+1}) = (n+1) \ln(u_{n+1}) - n \ln(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$. Comme on vient de le voir, $u_{n+1} > 1$, donc $\ln(u_{n+1}) > 0$. Toujours en utilisant la décroissance de f_n sur $]0; n]$, on en déduit que $u_{n+1} < u_n$, c'est-à-dire que la suite (u_n) est decroissante.

   (c) La suite est décroissante et minorée par 1, donc converge. On a vu plus haut que $u_n = n \ln(u_n)$, ce qu'on peut aussi écrire $\ln(u_n) = \frac{u_n}{n}$, donc $\frac{1}{n} \leqslant \ln u_n \leqslant \frac{e}{n}$. D'après le théorème des gendarmes, $(\ln(u_n))$ converge donc vers 0, ce qui implique que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

(d) Maintenant qu'on sait que u_n converge vers 1, on peut aussi dire que $\lim_{n\to+\infty} u_n - 1 = 0$, ce dont on peut déduire (résultats classique de cours) que $\ln(1+u_n-1) \sim u_n - 1$, c'est-à-dire que $\ln u_n \sim u_n - 1$.Cela revient bien à $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln u_n}{u_n - 1} = 1$. Or, on sait que $\ln(u_n) = \frac{u_n}{n} \sim \frac{1}{n}$ puisque $u_n \sim 1$. On a donc $u_n - 1 \sim \ln u_n \sim \frac{1}{n}$. Une autre façon d'écrire les choses est de dire que $u_n = 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

3. (a) Puisque $v_n > n$, une simple application du théorème de comparaison permet d'affirmer que $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

(b) Calculons donc : $f_n(n\ln n) = n\ln n - n\ln(n\ln n) = n\ln n - n\ln n - n\ln(\ln n) = -n\ln(\ln n)$. Si $n \geqslant 3$, $\ln n \geqslant \ln 3 > 1$, donc $\ln(\ln n) > 0$, et $f_n(n\ln n) < 0$. En utilisant la croissance de f sur $[n;+\infty[$, on en déduit que $v_n < n\ln n$.

(c) L'étude a déjà été faite puisque g n'est autre que f_2. La fonction g est donc décroissante sur $]0;2]$ et croissante sur $[2;+\infty[$, atteignant un minimum qui vaut $g(2) = 2(1-\ln 2) > 0$. La fonction est donc toujours strictement positive. On peut en particulier en déduire que $\forall n \geqslant 1$, $g(n) > 0$, donc $n > 2\ln n$.

(d) Encore un petit calcul : $f_n(2n\ln n) = 2n\ln n - n\ln(2n\ln n) = 2n\ln n - n\ln n - n\ln(2\ln n) = n\ln n - n\ln(2\ln n) = n(\ln n - \ln(2\ln n)$. Or, d'après la question précédente, $n > 2\ln n$, donc $\ln n > \ln(2\ln n)$, et $f_n(2n\ln n) > 0$. En utilisant une dernière fois la croissance de f_n, on en déduit que $v_n < 2n\ln n$, d'où l'encadrement.

(e) Passons donc à la moulinette logarithmique l'encadrement précédent : $\ln(n\ln n) < \ln(v_n) \leqslant \ln(2n\ln n)$, soit $\ln n + \ln(\ln n) \leqslant \ln v_n \leqslant \ln 2 + \ln n + \ln\ln n$. Le mieux pour obtenir l'équivalent est de tout diviser par $\ln n$: $1 + \frac{\ln\ln n}{\ln n} \leqslant \frac{\ln v_n}{\ln n} \leqslant \frac{\ln 2}{\ln n} + 1 + \frac{\ln\ln n}{\ln n}$. Il ne reste plus qu'à constater que des deux côtés de l'encadrement on a des termes qui convergent vers 1 (c'est de la croissance comparée pour $\frac{\ln\ln n}{\ln n}$), donc $\frac{\ln v_n}{\ln n}$ tend aussi vers 1, ce qui signifie bien que $v_n \sim \ln n$.