# Devoir Maison n°5

ECE3 Lycée Carnot

à rendre pour le 2 mars 2011

## Exercice 1

Étudier le plus complètement possible (limites, branches infinies, position de la courbe par rapport aux asymptotes, signe, dérivée, variations et courbe) chacune des deux fonctions suivantes :

- $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x - 2}{x - 2}$
- $g(x) = \dfrac{x}{e^{-\frac{1}{x^2}}}$

## Exercice 2 (EDHEC 97)

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n$ la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n(x) = x - n\ln(x)$.

1. (a) Étudier cette fonction et dresser son tableau de variations (on en profitera pour déterminer les asymptotes et autres branches infinies de $f_n$).
   (b) En déduire, lorsque $n$ est supérieur ou égal à 3, l'existence de deux réels $u_n$ et $v_n$ solutions de l'équation $f_n(x) = 0$ et vérifiant $0 < u_n < n < v_n$.
2. Étude de la suite $(u_n)_{n \geqslant 3}$.
   (a) Montrer que $\forall n \geqslant 3$, $u_n \in ]1; e[$.
   (b) Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$, en déduire que $(u_n)$ est décroissante.
   (c) En déduire la convergence de $(u_n)$ et montrer, en encadrant $\ln(u_n)$, que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.
   (d) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1$ ; en déduire que $u_n - 1 \sim \dfrac{1}{n}$.
3. Étude de la suite $(v_n)_{n \geqslant 3}$.
   (a) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.
   (b) Calculer $f_n(n\ln(n))$ puis montrer que $\forall n \geqslant 3$, $n\ln(n) < v_n$.
   (c) Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = x - 2\ln(x)$.
   Étudier $g$ et donner son signe. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n > 2\ln(n)$.
   (d) En déduire le signe de $f_n(2n\ln(n))$, puis établir que $n\ln(n) < v_n < 2n\ln(n)$.
   (e) Montrer enfin que $\ln(v_n) \sim \ln(n)$.