Devoir Maison n°4 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

4 février 2011

Exercice 1

1. Puisque l'énoncé nous précise que le premier tirage a lieu dans U_1 qui contient deux boules de chaque couleur, $u_1 = P(B_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Pour le deuxième tirage, cela dépend de ce qui s'est passé au premier. On a, au vu du calcul précédent, une probabilité $\frac{1}{2}$ de tirer dans chaque urne. La formule des probabilités totales nous donne alors $u_2 = \frac{1}{2} \times \frac{2}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$.
2. Pour le savoir, calculons donc $P(B_1 \cap B_2)$. On a $P(B_1) = \frac{1}{2}$ et $P_{B_1}(B_2) = \frac{1}{2}$. En fait cette dernière probabilité suffit à conclure que les deux évènements ne sont pas indépendants puisqu'elle est différente de $P(B_2)$.
3. Au vu de l'énoncé, on aura toujours $P_{B_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{2}$ (puisqu'on effectuera le tirage $n+1$ dans l'urne 1) et $P_{\overline{B_n}}(B_{n+1}) = \frac{1}{4}$ (dans ce cas, on tire dans l'urne 2).
4. Les évènements B_n et $\overline{B_n}$ formant évidemment un système complet d'évènements, on peut appliquer la formule des probabilités totales pour obtenir $P(B_{n+1}) = P(B_n) \times P_{B_n}(B_{n+1}) + P(\overline{B_n}) \times P_{\overline{B_n}}(B_{n+1})$, soit $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{4}(1 - u_n) = \frac{1}{4}u_n + \frac{1}{4}$.
5. On reconnait une suite arithmético-géométrique dont l'équation de point fixe $x = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$, donne $x = \frac{1}{3}$. On pose donc $v_n = u_n - \frac{1}{3}$, et on a $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{4}u_n + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{12} = \frac{1}{4}\left(u_n - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4}v_n$. Comme par ailleurs $v_1 = u_1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, on en déduit que $v_n = \frac{1}{6 \times 4^{n-1}}$, puis $u_n = v_n + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6 \times 4^{n-1}}$. La limite de u_n vaut $\frac{1}{3}$.

Exercice 2

1. On calcule donc $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On vérifie sans difficulté que $A^2 + 2A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^3$.
2. Procédons par récurrence. C'est vrai pour $n = 1$, car $A = 1 \times A + 0 \times A^2$. On peut donc poser $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$. Supposons désormais que $A^n = a_nA + b_nA^2$, alors $A^{n+1} = A \times A^n = A(a_nA + b_nA^2) = a_nA^2 + b_nA^3$. En utilisant la relation obtenue à la question précédente, on a donc $A^{n+1} = a_nA^2 + b_n(A^2 + 2A) = 2b_nA + (a_n + b_n)A^2$. La matrice A^{n+1} est donc de la forme souhaitée, en posant $a_{n+1} = 2b_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$, ce qui achève la récurrence.

3. PROGRAM suites ;
   USES wincrt ;
   VAR a,b,t : real ; i,n : integer ;
   BEGIN
   WriteLn('Choisissez la valeur de n') ;
   ReadLn(n) ;
   a := 1 ; b := 0 ;
   FOR i := 2 TO n DO
   BEGIN
   t := a ;
   a := 2*b ;
   b := t+b ;
   END ;
   WriteLn('a',n,'=',a,' et b',n,'=',b) ;
   END.
4. En utilisant les relations de récurrence obtenues à la question 2, on a $b_{n+2} = a_{n+1} + b_{n+1} = 2b_n + b_{n+1}$.
5. La suite (b_n) est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristiques $x^2 - x - 2 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 1+8 = 9$, et pour racines $r = \frac{1-3}{2} = -1$, et $s = \frac{1+3}{2} = 2$. On a donc $b_n = \alpha(-1)^n + \beta \times 2^n$. Comme par ailleurs $b_1 = 0$, et $b_2 = 1$ (puisque $A^2 = 1 \times A^2 + 0 \times A$), on en déduit que $-\alpha + 2\beta = 0$, soit $\alpha = 2\beta$; et $\alpha + 4\beta = 1$, soit $6\beta = 1$, donc $\beta = \frac{1}{6}$, puis $\alpha = \frac{1}{3}$, et enfin $b_n = \frac{(-1)^n}{3} + \frac{2^n}{6} = \frac{2^{n-1} + (-1)^n}{3}$. On a ensuite $a_n = 2b_{n-1} = \frac{2^{n-1} + 2(-1)^{n-1}}{3}$.
6. Finalement, on a $A^n = \frac{2^{n-1} + (-1)^n}{3} A^2 + \frac{2^{n-1} + 2(-1)^{n-1}}{3} A$. Pour $n = 8$, on a donc $A^8 = \frac{2^7+1}{3} A^2 + \frac{2^7-2}{3} A = \frac{129}{3} A^2 + \frac{126}{3} A = 43A^2 + 42A = \begin{pmatrix} 171 & 85 & 85 \\ 85 & 43 & 43 \\ 85 & 43 & 43 \end{pmatrix}$.
7. Posons $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. On a $AM = \begin{pmatrix} a+d+g & b+e+h & c+f+i \\ a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$ et $MA = \begin{pmatrix} a+b+c & a & a \\ d+e+f & d & d \\ g+h+i & g & g \end{pmatrix}$. Pour que les deux matrices soient égales, on doit avoir en observant les quatre coefficients en bas à droite $b = c = d = g$. Puis, en prenant le coefficient en haut à gauche, on obtient $a+d+g = a+b+c$, ce qui est toujours vrai d'après les égalités précédentes. Enfin, les quatre derniers coefficients donnent : $a = b+e+h = c+f+i = d+e+f = g+h+i$. En remplaçant c, d et g par b, on a donc $a = b+e+h = b+f+i = b+e+f = b+h+i$, soit encore $a-b = e+h = f+i = e+f = h+i$. Comme $e+h = e+f$, alors $f = h$, puis $e+h = f+i$ donne $e = i$. Toutes les égalités se réduisent alors à $a-b = e+f$, soit $a = b+e+f$. Finalement, les matrices convenant sont de la forme $M = \begin{pmatrix} b+e+f & b & b \\ b & e & f \\ b & f & e \end{pmatrix}$, avec $b, e, f \in \mathbb{R}^3$.