Devoir Maison n°4

ECE3 Lycée Carnot

à rendre au plus tard le 4 février 2011

Exercice 1

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 dans lesquelles on effectue des tirages avec remise. L'urne U_1 contient deux boules noires et deux boules blanches, l'urne U_2 une boule blanche et trois noires. De plus, les tirages s'effectuent selon le protocole suivant :

- le premier tirage s'effectue dans l'urne U_1.
- si on obtient une boule blanche lors du tirage numéro n, alors le tirage $n+1$ s'effectue dans l'urne U_1 ; si on obtient une boule noire au tirage n, le tirage $n+1$ s'effectue dans l'urne U_2.

On note B_n l'événement « On tire une boule blanche au tirage n », et $u_n = P(B_n)$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Les événements B_1 et B_2 sont-ils indépendants ?
3. Déterminer les probabilités conditionnelles $P_{B_n}(B_{n+1})$ et $P_{\overline{B_n}}(B_{n+1})$.
4. En déduire une relation de récurrence vérifiée par la suite (u_n).
5. Déterminer la valeur de u_n et sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2

On considère dans cet exercice les matrices carrées réelles d'ordre trois suivantes : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3, puis vérifier que $A^3 = A^2 + 2A$.
2. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, il existe un couple unique (a_n, b_n) de réels tel que $A^n = a_nA + b_nA^2$, et exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
3. Écrire un programme en Turbo-Pascal qui calcule et affiche a_n et b_n pour un entier n choisi par l'utilisateur.
4. Montrer que, $\forall n \geqslant 1$, $b_{n+2} = b_{n+1} + 2b_n$.
5. En déduire a_n et b_n en fonction de n.
6. Donner l'expression de A^n en fonction de A, A^2 et n. Écrire explicitement la matrice A^8.
7. Déterminer l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $AM = MA$ (question indépendante du reste de l'exercice).