(Mini)-Devoir à la Maison n°3 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

24 novembre 2010

1. Il y a 16 cases à colorier, avec quatre couleurs possibles pour chaque case (et répétitions possibles, bien évidemment), soit 4^{16} possibilités.
2. Si aucune case n'est bleue, il ne reste plus que trois couleurs possibles pour chaque case, soit 3^{16} possibilités.
3. Il faut choisir la couleur ... et c'est tout. Il n'y a donc que quatre grilles possibles.
4. Il faut choisir les deux couleurs parmi les quatre possibles, puis colorier les 16 cases de la grille à l'aide de ces deux couleurs, soit $\binom{4}{2}(2^{16}-2)$ possibilités. Pourquoi -2 ? Parce qu'on veut exactement deux couleurs utilisées et qu'une fois choisies les deux couleurs (par exemple bleu et jaune), il faut éviter, parmi les 2^{16} coloriages n'utilisant que ces deux couleurs, les deux pour lesquels la grille sera unicolore (toute bleue ou toute jaune dans notre exemple).
5. Il reste alors huit cases à colorier comme on le souhaite, soit 4^8 possibilités.
6. Il y a donc soit 0 case jaune (3^{16} possibilités, comme à la question 2), soit une (il faut la choisir, puis colorier les 15 cases restantes, soit $\binom{16}{1}\times 3^{15}$ possibilités), soit deux (même raisonnement, $\binom{16}{2}\times 3^{14}$ possibilités), soit trois. Au total, $3^{16}+\binom{16}{1}\times 3^{15}+\binom{16}{2}\times 3^{14}+\binom{16}{3}\times 3^{13}$ grilles possibles.
7. Il faut choisir quelles sont les quatre cases bleues : $\binom{16}{4}$ possibilités ; puis quelles sont les quatre cases rouges : $\binom{12}{4}$; les quatre cases vertes : $\binom{8}{4}$; et on n'a plus le choix pour les quatre cases jaunes. Soit $\binom{16}{4}\times\binom{12}{4}\times\binom{8}{4}$ possibilités.
8. Sur chaque ligne, il faut choisir l'ordre dans lequel apparaissent les couleurs, ce qui peut se faire de $4!$ façons. Comme il y a quatre lignes à remplir indépendamment, cela fait $(4!)^4$ possibilités.
9. C'est beaucoup plus pénible que tout le reste. On commence par choisir l'ordre sur la première ligne, ce qui laisse $4!$ possibilités. On choisit ensuite la position des trois autres cases rouges (par exemple), ce qui peut se faire de $3!$ façons (trois possibilités pour la case rouge de la deuxième ligne, puisqu'il faut éviter la colonne où se trouve déjà une case rouge, puis deux pour celle de la troisième ligne, et plus de choix pour la quatrième case rouge). Une fois tous ces choix effectués, il ne reste en fait que quatre façons de compléter la grille. Supposons par exemple que la case rouge de la deuxième ligne se trouve en-dessous d'une case bleue (les couleurs jouant toutes le même rôle, ça ne change rien que ce soit une autre couleur que bleu) : soit on met une case bleue en-dessous de la rouge de la première ligne, et on n'a plus le choix pour les cases bleues des troisième et quatrième ligne, ni pour la fin de la deuxième ligne, il ne reste que 2 possibilités pour les cases vertes et jaunes des deux dernières lignes ; soit on met une verte ou une jaune en-dessous de la rouge de la première ligne, et là on n'a plus de choix du tout, donc deux autres possibilités. Finalement, on a $4!\times 3!\times 4$ possibilités.

10. La grille peut contenir au choix, soit 8 cases bleues et 8 rouges (et pas d'autre choix à faire), soit 7 cases bleues et 7 rouges (et deux qu'on colore au choix en jaune ou vert), 6 bleues et 6 rouges (et quatre cases avec deux couleurs possibles), etc. On ne peut pas faire plus simple que la magnifique somme suivante : $\binom{16}{8} \times \binom{8}{8} + \binom{16}{7} \times \binom{9}{7} \times 2^2 + \binom{16}{6} \times \binom{10}{6} \times 2^4 + \binom{16}{5} \times \binom{11}{5} \times 2^6 + \binom{16}{4} \times \binom{12}{4} \times 2^8 + \binom{16}{3} \times \binom{13}{3} \times 2^{10} + \binom{16}{2} \times \binom{14}{2} \times 2^{12} + \binom{16}{1} \times \binom{15}{1} \times 2^{14} + 2^{16}$.
11. Les possibilités sont plus réduites : on ne peut plus avoir 8 rouges et 8 bleues, mais on peut avoir 7 rouges, 7 bleues et 2 vertes ; 6 rouges, 6 bleues, 3 vertes et 1 jaune ; 5 rouges, 5 bleues, 4 vertes et 2 jaunes etc, jusqu'à 0 rouge, 0 bleue, 9 vertes et 7 jaunes, soit un total de $\binom{16}{7} \times \binom{9}{7} + \binom{16}{6} \times \binom{10}{6} \times \binom{4}{3} + \binom{16}{5} \times \binom{11}{5} \times \binom{6}{4} + \binom{16}{4} \times \binom{12}{4} \times \binom{8}{5} + \binom{16}{3} \times \binom{13}{3} \times \binom{10}{6} + \binom{16}{2} \times \binom{14}{2} \times \binom{12}{7} + \binom{16}{1} \times \binom{15}{1} \times \binom{14}{8} + \binom{16}{9}$.
12. Passons au complémentaire. Pour choisir une colonne qui ne soit pas entièrement verte, il y a $4^4 - 1$ possibilités (quatre cases à colorier et un seul coloriage pour lequel tout est vert). Si on veut qu'aucune colonne ne soit entièrement verte, il y a donc $(4^4 - 1)^4$ coloriages possibles (on répète sur chaque colonne le calcul précédent). Le nombre de coloriages avec au moins une colonne entièrement verte est donc $4^{16} - (4^4 - 1)^4$.