Devoir Maison n°2 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

5 novembre 2010

Exercice 1

1. Essayons donc d'exprimer v_{n+1} en fonction de v_n : $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) + 2 = 3u_n - 2n + 4 - n + 1 = 3u_n - 3n + 5 = 3v_n - 1$. La suite (v_n) est donc une suite arithmético-géométrique. Son équation de point fixe est $x = 3x - 1$, qui donne $x = \frac{1}{2}$. Posons donc $w_n = v_n - \frac{1}{2}$, on a alors $w_{n+1} = v_{n+1} - \frac{1}{2} = 3v_n - \frac{3}{2} = 3w_n$. La suite (w_n) est donc géométrique de raison 3 et de premier terme $w_0 = v_0 - \frac{1}{2} = u_0 + 2 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$. Concluion : $w_n = \frac{5 \times 3^n}{2}$, puis $v_n = \frac{5 \times 3^n + 1}{2}$.
2. La relation entre u_n et v_n permet d'obtenir $u_n = v_n + n - 2 = \frac{5 \times 3^n - 3}{2} + n$.
3. C'est un calcul un peu brutal, mais qui ne fait intervenir que des sommes classiques : $\sum_{k=0}^{k=n} u_k = \frac{5}{2}\sum_{k=0}^{k=n} 3^k - \sum_{k=0}^{k=n} \frac{3}{2} + \sum_{k=0}^{k=n} k = \frac{5}{2}\frac{1-3^{n+1}}{1-3} - \frac{3(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{5 \times 3^{n+1} - 5 - 6n - 6 + 2n^2 + 2n}{4} = \frac{5 \times 3^{n+1} + 2n^2 - 4n - 11}{4}$.

Exercice 2

1. Un calcul sommaire donne $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \backslash \{-1; 1\}$.
2. Pour voir si f est injective, considérons deux réels x et x' tels que $f(x) = f(x')$, soit $\frac{2x^2}{x^2 - 1} = \frac{2x'^2}{x'^2 - 1}$, ce qui donne $2x^2(x'^2 - 1) = 2x'^2(x^2 - 1)$ puis $-2x^2 = -2x'^2$. Ceci n'implique pas que $x = x'$ (on peut aussi avoir $x = -x'$), la fonction n'est pas injective. On a par exemple $f(2) = f(-2) = \frac{8}{3}$. Pour la surjectivité, cherchons les antécédents d'un réel quelconque y, et partons donc de $y = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$. Cela implique $yx^2 - y = 2x^2$, soit $x^2(y - 2) = y$, ou encore $x^2 = \frac{y}{y - 2}$. Cette équation n'a pas de solution lorsque $y = 2$ (mais aussi lorsque $y \in]0; 2[$), donc la fonction f n'est pas non plus surjective.
3. Sur l'ensemble en question, f devient injective puisque seul l'antécédent positif de y est valable (et il y en a toujours un positif et un négatif parmi les deux). Reste à déterminer quels sont les valeurs de y pour lesquelles $x^2 = \frac{y}{y - 2}$ admet une solution, c'est-à-dire les valeurs pour lesquelles $\frac{y}{y - 2} \geqslant 0$. Un petit tableau de signe permet de déterminer que l'ensemble d'arrivée de f sera $] - \infty; 0] \cup]2; +\infty[$.

4. D'après les calculs précédents, g est définie sur $]-\infty;0]\cup]1;+\infty[$ par $g(y)=\sqrt{\dfrac{y}{y-2}}$ (on garde l'antécédent positif de y).

Exercice 3

1. Un peu de calcul, ça ne peut pas faire de mal :

$$\begin{aligned}\frac{a}{k}+\frac{b}{k+2}+\frac{c}{k+4} &= \frac{a(k+2)(k+4)+bk(k+4)+ck(k+2)}{k(k+2)(k+4)}\\ &= \frac{a(k^2+6k+8)+b(k^2+4k)+c(k^2+2k)}{k(k+2)(k+4)}\\ &= \frac{(a+b+c)k^2+(6a+4b+2c)k+8a}{k(k+2)(k+4)}\end{aligned}$$

Par identification, on obtient donc $a+b+c=6a+4b+2c=0$ et $8a=1$, soit $a=\dfrac{1}{8}$, puis en divisant la deuxième équation par 2, $3a+2b+c=0$. Il ne reste plus qu'à soustraire la première équation pour avoir $2a+b=0$, soit $b=-2a=-\dfrac{1}{4}$, puis $c=-a-b=\dfrac{1}{8}$. Finalement, $\dfrac{1}{k(k+2)(k+4)}=\dfrac{1}{8k}-\dfrac{1}{4(k+2)}-\dfrac{1}{8(k+4)}$.

2. La somme en question est une somme télescopique (mais oui !) : $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k(k+2)(k+4)}=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{8k}-\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{4(k+2)}+\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{8(k+4)}=\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}-\frac{1}{4}\sum_{k=3}^{k=n+2}\frac{1}{k}+\frac{1}{8}\sum_{k=5}^{k=n+4}\frac{1}{k}=$ $\displaystyle\frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+4}\right)=$ $\displaystyle\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{24}+\frac{1}{32}-\frac{1}{12}-\frac{1}{16}+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+4}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{12+4+3-8}{96}+$ $\displaystyle\frac{1}{8}\frac{(n+1)(n+2)(n+4)+(n+1)(n+2)(n+3)-(n+2)(n+3)(n+4)-(n+1)(n+3)(n+4)}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}=$ $\displaystyle\frac{11}{96}+\frac{n^3+7n^2+14n+8+n^3+6n^2+11n+6-n^3-9n^2-26n-24-n^3-8n^2-19n-12}{8(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}=$ $\displaystyle\frac{11}{96}-\frac{4n^2+20n+22}{8(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}=\frac{11}{96}-\frac{2n^2+10n+11}{4(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$.

3. Notons P_n la propriété : $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k(k+2)(k+4)}=\frac{11}{96}-\frac{2n^2+10n+11}{4(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$. Pour $n=1$, le membre de gauche vaut $\dfrac{1}{1\times3\times5}=\dfrac{1}{15}$, et le membre de droite vaut $\dfrac{11}{96}-\dfrac{23}{4(2\times3\times4\times5)}=\dfrac{11}{96}-\dfrac{23}{480}=\dfrac{55-23}{480}=\dfrac{32}{480}=\dfrac{1}{15}$. Ouf, ça marche ! Supposons désormais P_n vérifiée, on a alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n+1}\frac{1}{k(k+2)(k+4)}=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k(k+2)(k+4)}+\frac{1}{(n+1)(n+3)(n+5)}=$ (par hypothèse de récurrence) $\displaystyle\frac{11}{96}-\frac{2n^2+10n+11}{4(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}+\frac{1}{(n+1)(n+3)(n+5)}=\frac{11}{96}-$ $\displaystyle\frac{(2n^2+10n+11)(n+5)-4(n+2)(n+4)}{4(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}=\frac{11}{96}-\frac{2n^3+20n^2+61n+55-4n^2-24n-32}{4(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}=$ $\displaystyle\frac{11}{96}-\frac{2n^3+16n^2+37n+23}{4(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}$. Si on veut que la formule soit vraie au rang $n+1$, le numérateur devrait être égal à $(n+1)(2(n+1)^2+10(n+1)+11)=(n+1)(2n^2+4n+2+10n+10+11)=(n+1)(2n^2+14n+23)=2n^3+16n^2+37n+23$. 9a marche ! La propriété est donc bien prouvée par récurrence (qui a dit que cet exercice était immonde ?).

Problème

1. Le réel 1 est racine évidente de l'équation. On a donc $x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x-1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$. Par identification, on obtient $a = 1$; $b - a = -1$ donc $b = 0$; $c - b = -4$ donc $c = -4$. Conclusion : $x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x-1)(x^2-4) = (x-1)(x-2)(x+2)$. Les solutions sont donc $\mathcal{S} = \{-2; 1; 2\}$.
2. Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q. On a donc $u_n = u_0 \times q^n$, et de même pour les termes suivants. Pour que (u_n) vérifie la relation, il faut donc avoir $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_0 q^{n+3} - u_0 q^{n+2} - 4u_0 q^{n+1} + 4u_0 q^n = 0$, soit $u_0 q^n (q^3 - q^2 - 4q + 4) = 0$. En supposant la suite non nulle, on en déduit que q est solution de l'équation précédente, donc $q = -2$, $q = 1$ ou $q = 2$.
3. (a) Il s'agit de résoudre ce magnifique système. La différence des deux premières lignes donne $b - 3c = u_1 - u_0$; la différence des deux dernières donne $2b + 6c = u_2 - u_1$. En soustrayant à cette dernière relation la précédente multipliée par deux, on a $12c = u_2 - u_1 - 2u_1 + 2u_0 = 2u_0 - 3u_1 + u_2$, donc $c = \dfrac{u_0}{6} - \dfrac{u_1}{4} + \dfrac{u_2}{12}$; puis $b = 3c + u_1 - u_0 = -\dfrac{u_0}{2} + \dfrac{u_1}{4} + \dfrac{u_2}{4}$; et enfin $a = u_0 - b - c = \dfrac{4u_0}{3} - \dfrac{u_2}{3}$.

   (b) Par hypothèse, (u_n) vérifie (R), et les suites constantes et géométriques de raison 2 ou -2 également. La suite (v_n) est donc une somme de quatre suites vérifiant la relation (R). Il n'est alors pas difficile de se convaincre que (v_n) également vérifie la relation (R) (la relation étant linéaire, une somme de suites la vérifiant la vérifiera également).

   Prouvons donc par récurrence triple la propriété $P_n : v_n = 0$. Il faut faire une unitialisation triple : $v_0 = u_0 - a - b - c = 0$; $v_1 = u_1 - a - 2b + 2c = 0$ et $v_2 = u_2 - a - 4b - 4c = 0$ par définition des réels a, b et c. Supposons maintenant P_n, P_{n+1} et P_{n+2} vérifiées, alors, la suite vérifiant la relation (R), on a $v_{n+3} = v_{n+2} + 4v_{n+1} - 4v_n = 0 + 0 + 0 = 0$, donc P_{n+3} est vérifiée, et (v_n) est bien la suite nulle.

   (c) Conclusion : $u_n = a + b2^n + c(-2)^n$. On peut expliciter u_n à l'aide de u_0, u_1 et u_2 en reprenant les formules obtenues pour a, b et c, mais ce n'est finalement pas très intéressant. Ce qui l'est plus, c'est de voir que les suites récurrentes linéaires d'ordre 3 se comportent comme celles d'ordre 2 : les solutions sont sommes de suites géométriques dont les raisons sont solutions de l'équation caractéristique de la relation.