Devoir Maison n°2

ECE3 Lycée Carnot

à rendre au plus tard le 4 novembre 2010

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 4$. On pose ensuite $v_n = 3u_n - 2n + 4$.

1. Prouver que la suite (v_n) est d'un type bien connu et en déduire la valeur de v_n.
2. Calculer la valeur de u_n.
3. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} u_k$.

Exercice 2

On considère l'application f définie par $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer si f est injective ou surjective sur $\mathcal{D}_f$.
3. Montrer que f est bijective de $[0;1[\cup]1;+\infty[$ vers un ensemble à déterminer.
4. On note g la réciproque de f (restreinte à $[0;1[\cup]1;+\infty[$). Déterminer l'expression de $g(x)$.

Exercice 3

1. Déterminer quatre réels a, b, et c tels que $\forall k \geqslant 1$,
$$\frac{1}{k(k+2)(k+4)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+2} + \frac{c}{k+4}$$
.
2. À l'aide de la question précédente, calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+2)(k+4)}$.
3. Vérifier la formule obtenue à la question précédente à l'aide d'une démonstration par récurrence.

Exercice 4

Le but de cet exercice est de déterminer les suites (un) qui vérifient pour tout entier n la relation (R) : $u_{n+3} - u_{n+2} - 4u_{n+1} + 4u_n = 0$.

1. Résoudre l'équation $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$.
2. Déterminer les raisons des suites géométriques vérifiant la relation (R).
3. On considère maintenant une suite (u_n) qui vérifie (R).
   (a) Déterminer, en fonction de u_0, u_1 et u_2, les réels a, b et c qui vérifient le système
   $$\left\{\begin{array}{ccccccc} a & + & b & + & c & = & u_0 \\ a & + & 2b & - & 2c & = & u_1 \\ a & + & 4b & + & 4c & = & u_2 \end{array}\right.$$
   (b) On introduit la suite auxiliaire (v_n) définie par $v_n = u_n - a - b2^n - c(-2)^n$. Montrer que la suite (v_n) vérifie la condition (R), puis, à l'aide d'une récurrence triple, que (v_n) est la suite nulle.
   (c) En déduire la forme générale des suites vérifiant (R).