Devoir Maison n°1 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

24 septembre 2010

Exercice 1

1. Au moins un élève de la classe n'aura jamais la moyenne en maths cette année.
2. Il y a eu au moins un jour sans pluie en juin à Londres.
3. Il existe un pommier ayant plus de 100 fruits dont aucun n'est pourri.

Exercice 2

1. FAUX : si x est un nombre strictement positif, on peut toujours en trouver un autre plus petit que lui, par exemple $\dfrac{x}{2}$.
2. VRAI : il suffit de prendre $y = e^x$.
3. VRAI : par exemple $x = e^a + 1$.
4. VRAI : si $x < \sqrt{2}$, alors $\sqrt{2} - x > 0$, et on peut trouver un nombre rationnel strictement inférieur à $\sqrt{2} - x$ (en considérant par exemple les nombres de la forme $\dfrac{1}{n}$, on a une suite tendant vers 0 quand n tend vers $+\infty$, donc on finira par y trouver des valeurs plus petites que n'importe quel nombre strictement positif). Un tel rationnel a vérifie donc $x + a < \sqrt{2}$.

Exercice 3

1. Puisque $\ln(x^2) = 2\ln x$, on se ramène simplement à l'équation $-3\ln x = 2$, soit $\ln x = -\dfrac{2}{3}$, et $x = e^{-\frac{2}{3}}$ (l'équation initiale n'a de sens que pour $x > 0$, mais la solution obtenue est bien positive), donc $\mathcal{S} = \{e^{-\frac{2}{3}}\}$.
2. Faisons un petit tableau de signes :

x	$-\infty$ $\quad$ -2	$\frac{5}{2}$	3	$+\infty$
$\|x+2\|$	$-x-2$ 0	$x+2$	$x+2$	$x+2$
$\|2x-5\|$	$5-2x$	$5-2x$ 0	$2x-5$	$2x-5$
$\|3-x\|$	$3-x$	$3-x$	$3-x$ 0	$x-3$
$\|x+2\| - \|2x-5\| - \|3-x\|$	$2x-10$	$4x-6$	4	$-2x+10$

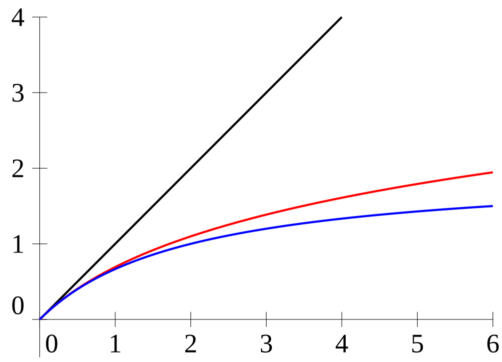
L'équation a des solutions lorsque l'expression de la dernière ligne s'annule, ce qui ne peut manifestement pas se produire sur $\left[\dfrac{5}{2};3\right]$. Sur $\left[-2;\dfrac{5}{2}\right]$, $4x-6$ s'annule en $\dfrac{3}{2}$, solution valable puisqu'appartenant à l'intervalle. Sur $\left]-\infty;\dfrac{5}{2}\right]$, $2x-10$ s'annule pour $x = 5$, solution également non valable. Enfin, sur $[3;+\infty[$, $-2x+10$ s'annule en 5, qui est cette fois-ci une solution acceptable. Conclusion : $\mathcal{S} = \{5\}$.

3. On pose $X = \sqrt{x}$ (naturellement, x devra être positif pour que l'inéquation ait en sens). L'inéquation devient $X^2 - 3X + 2 \leq 0$, le discriminant du trinome est $\Delta = 9 - 8 = 1$, il y a donc deux racines $x_1 = \dfrac{3-1}{2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{3+1}{2} = 2$. On doit donc avoir $\sqrt{x} \in [1;2]$, soit $x \in [1;4]$.
4. Cela revient simplement à demander $x^2 - 3x - 1 < 3$, soit $x^2 - 3x - 4 < 0$. Ce trinome a pour discriminant $\Delta = 9 + 16 = 25$, et admet donc deux racines $x_1 = \dfrac{3-5}{2} = -1$ et $x_2 + \dfrac{3+5}{2} = 4$. Le trinome est strictement négatif entre ses racines, donc $\mathcal{S} =]-1;4[$
5. Un peu d'observation laisse penser que poser $X = x^{\frac{1}{8}}$ peut être intéressant puisque l'équation devient alors $3\sqrt{2}X - X^2 = 4$, soit $X^2 - 3\sqrt{2}X + 4 = 0$. Le discriminant de ce trinome vaut $18 - 4 \times 4 = 2$, donc il y a deux solutions $X_1 = \dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ et $X_2 = \dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$, ce qui donne pour l'équation initiale $x_1 = X_1^8 = 2^4 = 16$ et $x_2 = X_2^8 = 2^8 \times 16 = 4\ 096$.

Exercice 4

Soient f et g les fonctions définies sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \ln(1+x)$ et $g(x) = \dfrac{2x}{x+2}$. On note h la fonction définie sur ce même intervalle par $h(x) = f(x) - g(x)$.

1. Dérivons h : $\forall x \in [0;+\infty[$, $h'(x) = f'(x) - g'(x) = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{2(x+2)-2x}{(x+2)^2} = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{4}{(x+2)^2} = \dfrac{(x+2)^2 - 4(1+x)}{(1+x)(x+2)^2} = \dfrac{x^2}{(1+x)(x+2)^2}$. Cette dérivée est toujours positive sur $\mathcal{D}_h$, donc la fonction h est croissante sur $[0;+\infty[$. Comme $h(0) = 0 - 0 = 0$, on en déduit que la fonction h est toujours positive, c'est-à-dire que $\forall x \geq 0$, $f(x) - g(x) \geq 0$, ce qui prouve bien que f est minorée par g.
2. Calculons les tangentes aux deux courbes en 0. Pour f, on obtient $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$, donc la tangente a pour équation $y = x$. Pour g, on a également $g(0) = 0$ et $g'(0) = \dfrac{4}{4} = 1$, d'où la même équation pour la tangente.
3. Constatons en passant qu'au vu des dérivées calculées pour la première question, les fonctions f et g sont toutes deux croissantes sur $[0;+\infty[$, et traçons une allure des courbes :



4. La fonction $f_1 : x \mapsto \ln(1+x) - x$ a pour dérivée $f_1'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = -\dfrac{x}{1+x}$. Cette dérivée étant négative sur $[0;+\infty[$, f_1 est décroissante.
5. On a $f_1(0) = 0 - 0 = 0$. Pour la limite, on peut constater que $f_1(x) = x\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x} - 1\right)$. La parenthèse a pour limite -1 car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 0$ par croissance comparée (ce n'est

pas exactement un résultat de croissance comparée, mais on s'y ramène en contstant que $\ln(1+x) \leq \ln 2x$ pour $x \geq 1$ par exemple). La limite ne sert d'ailleurs abolument à rien pour constater que f_1 est toujours négative, donc que f est majorée par $x/$

6. Comme $\forall x \geq 0$, $\forall k \geq 1$, $x \leq kx$, on aura bien $f(x) \leq x \leq kx$, donc f majorée par kx.

7. Étudions pour cela les variations de la fonction f_k : $f'_k(x) = \dfrac{1}{1+x} - k = \dfrac{1-k-kx}{1+x}$. Le numérateur de cette dérivée s'annule lorsque $x = \dfrac{1-k}{k} = \dfrac{1}{k} - k$, qui est un réel strictement positif lorsque $k \in]0;1[$. La fonction f_k est donc strictement croissante puis décroissante, admet un maximum strictement positif (puisque $f_k(0) = 0$, ce qui rend impossible le fait que kx majore f_k.