Devoir Maison n°1

ECE3 Lycée Carnot

à rendre au plus tard le 24 septembre 2010

Exercice 1

Donner la négation des énoncés suivants :

1. Tous les élèves de la classe auront au-dessus de la moyenne en maths au moins une fois dans l'année.
2. Il a plu tous les jours au mois de juin à Londres.
3. Dans tout pommier ayant plus de 100 fruits, il y a au moins une pomme pourrie.

Exercice 2

Le retour du VRAI/FAUX. Justifier soigneusement chaque réponse (démontrer les résultats vrais, donner des contre-exemples quand c'est faux, éventuellement citer une hypothèse à ajouter pour rendre l'énoncé vrai) :

1. $\exists x > 0$, $\forall y > 0$, $x < y$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \mathbb{R}$, $x = \ln y$.
3. $\forall a \in \mathbb{R}$, $\exists x \in \mathbb{R}$, $a < \ln x$.
4. $\forall x < \sqrt{2}$, $\exists a \in \mathbb{Q}_+^*$, $x + a < \sqrt{2}$.

Exercice 3

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $\ln(x^2) - 5\ln x = 2$
2. $|x+2| - |2x-5| = |3-x|$
3. $x - 3\sqrt{x} \leq -2$
4. $Ent(x^2 - 3x - 1) \leq 2$
5. $3\sqrt{2}x^{\frac{1}{8}} - x^{\frac{1}{4}} = 4$

Exercice 4

Soient f et g les fonctions définies sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(1 + x)$ et $g(x) = \dfrac{2x}{x + 2}$.
On note h la fonction définie sur ce même intervalle par $h(x) = f(x) - g(x)$.

1. Étudier les variations de h. En déduire que f est minorée par g sur $[0; +\infty[$.
2. Montrer que les courbes représentatives de f et de g admettent une tangente commune en 0.
3. Tracer dans un même repère les deux courbes ainsi que la tangente en question.
4. On définit désormais, pour tout réel strictement positif k, la fonction f_k par $f_k(x) = \ln(1 + x) - kx$. Étudier les variations de la fonction f_1.
5. Déterminer $f_1(0)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x)$, et en déduire que f_1 majore f.
6. Montrer que, si $k \geq 1$, f est majorée par f_k.
7. Déterminer de même s'il existe des valeurs de k appartenant à $]0; 1[$ pour lesquelles f_k majore f.