Devoir Surveillé n°7 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

5 avril 2011

Exercice 1

1. La fonction g est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$, et $g'(x) = 3x^2 - 1 - \dfrac{2}{x} = \dfrac{3x^3 - x - 2}{x}$. Le numérateur admet pour racine évidente $x = 1$, on peut le factoriser sous la forme $3x^3 - x - 2 = (x-1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$. Par identification des coefficients, on obtient $a = 3$, $b = 3$ et $c = 2$. On a donc $3x^3 - x - 2 = (x-1)(3x^2 + 3x + 2)$. Le deuxième facteur a pour discriminant $\Delta = 9 - 24 = -15$, il est toujours positif. On en déduit que la fonction g est strictement décroissante sur $]0;1]$ et strictement croissante sur $[1;+\infty[$. Elle admet donc un minimum en $x = 1$ de valeur $g(1) = 3$. La fonction est donc toujours strictement positive.

2. On a assez manifestement $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*$. De plus, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - 1 + \ln x}{x^2} = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ (pas de formein déterminée ici). En $+\infty$, les plus observateurs remarqueront que $f(x) - (x+1) = \dfrac{x - 1 + \ln x}{x^2} \sim \dfrac{1}{x}$, qui a donc pour limite 0. Ceci suffit à affirmer que la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$.

3. Il faut donc étudier le signe de $\dfrac{x - 1 + \ln x}{x^2}$. Or, $\forall x \geqslant 1$, $x - 1 \geqslant 0$ et $\ln x \geqslant 0$, donc la courbe de f est au-dessus de la droite. Au contraire, si $x \in]0;1]$, $x - 1$ et $\ln x$ sont tous deux négatifs, et la courbe est en-dessous de la droite.

4. Calculons : $f(x) = x + 1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{\ln x}{x^2}$, donc $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{2\ln x}{x^3} = \dfrac{g(x)}{x^3}$. Comme $x \geqslant 0$, $x^3 \geqslant 0$ et on a vu que g était toujours positive donc f est strictement croissante.

5. Au vu des limites calculées, f est bijective de $]0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, donc s'annule une seule fois. Comme de plus $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{2} + \dfrac{-\frac{1}{2} - \ln 2}{\frac{1}{4}} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{4}{2} - 4\ln 2 = -\dfrac{1}{2} - 4\ln 2 < 0$ et $f(1) = 2 + 0 = 2 > 0$, donc la valeur d'annulation est bien comprise entre $\dfrac{1}{2}$ et 1.

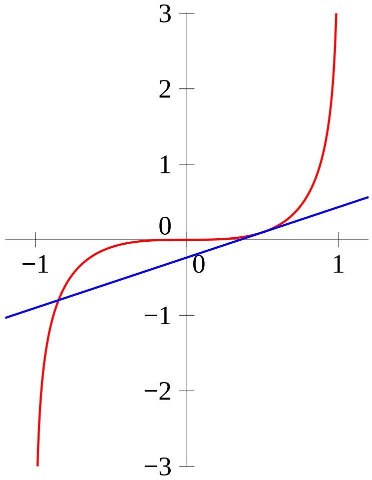
Exercice 2

1. La fonction h est définie si $\dfrac{1+x}{1-x} > 0$, soit $\mathcal{D}_g =]-1;1[$ (tableau de signes si vous n'êtes pas convaincus).

2. Le domaine de définition de h est symétrique par rapport à 0, et $h(-x) = \ln \dfrac{1-x}{1+x} - 2x = -\ln \dfrac{1+x}{1-x} - 2x = -h(x)$, donc la fonction est impaire.

3. La fonction h est $\mathcal{C}^\infty$ comme somme et quotient de fonctions usuelles et $h'(x) = \dfrac{\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}}{\frac{1+x}{1-x}} - 2 = \dfrac{2}{(1+x)(1-x)} - 2 = \dfrac{2 - 2 + 2x^2}{1 - x^2} = \dfrac{2x^2}{1-x^2}$.

4. Calculons $h\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} - 2\times\frac{1}{2} = \ln 3 - 1$, et $h'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2\times\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$, donc l'équation de la tangente T est $y = \frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \ln 3 - 1 = \frac{2}{3}x + \ln 3 - \frac{4}{3}$.
5. La fonction h' est strictement positive sur $\mathcal{D}_h$, donc h y est strictement croissante. De plus, $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{1+x}{1-x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 1^-} h(x) = +\infty$. Par imparité de h, $\lim\limits_{x\to -1^+} h(x) = -\infty$.
6. Calculons $h''(x) = \frac{2x(1-x^2) + 2x(x^2)}{(1-x^2)^2} = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$. La fonction h est donc concave sur $]-1;0]$ et convexe sur $[0;1[$, avec un point d'inflexion en 0. Notons que $h(0) = 0$ et $h'(0) = 0$, donc la tanegnte à la courbe au point d'inflexion est horizontale.
7. La fonction h' est croissante sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ d'après la question précédente, et $h'(0) = 0$ et $h'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}$, d'où l'encadrement demandé.
8. Voilà la courbe demandée :



9. (a) La fonction h est croissante sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$, et $h(0) = 0$ et $h\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 3 - 1 < \frac{1}{2}$, donc l'intervalle est effectivement stable par h. On prouve ensuite par récurrence que $u_n \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$. En effet, u_0 appartient à l'intervalle par hypothèse, et si u_n est dans l'intervalle, $h(u_n) = u_{n+1}$ aussi par stabilité de l'intervalle.

   (b) Toutes les hypothèses sont réunies pour appliquer l'inégalité des accroissements finis sur $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ à $y = u_n$ et $x = 0$ (qui est bien un point fixe de h). On obtient alors $|u_{n+1}| \leqslant \frac{2}{3}|u_n|$. On effectue ensuite une nouvelle récurrence pour prouver que $|u_n| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$. C'est vrai pour u_0 puisque $u_0 = \frac{1}{2}$, et si on suppose l'hypothèse vérifiée pour u_n, on a $|u_{n+1}| \leqslant \frac{2}{3}|u_n| \leqslant \frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$, ce qui prouve l'hérédité.

   (c) Comme $\frac{2}{3} \in [-1;1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n| = 0$, ce qui prouve que la suite (u_n) tend vers 0.
10. PROGRAM terme ;
    VAR u : real ; n,i : integer ;

```
BEGIN
WriteLn('Choisissez la valeur de n');
ReadLn(n);
u := 1/2;
FOR i := 1 TO n DO u := ln((1+u)/1-u))-2*u;
WriteLn(u);
END.

PROGRAM deux;
VAR u,eps : real; n : integer;
BEGIN
u := 1/2; n :=0;
WHILE u > eps DO
BEGIN
u := ln((1+u)/1-u))-2*u;
n := n+1;
END;
WriteLn(n);
END.
```

Exercice 3

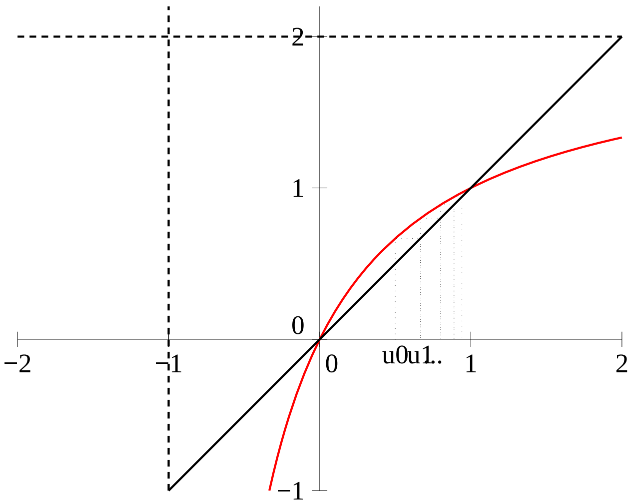
1. (a) Calculons $a+\dfrac{b}{x+1}=\dfrac{ax+a+b}{x+1}$. Par identification, on doit donc avoir $a=2$ et $a+b=0$, d'où $\dfrac{2x}{x+1}=2-\dfrac{2}{x+1}$.

   (b) La fonction f est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. Elle admet pour limite $+\infty$ en -1^- (le numérateur est négatif et le dénominateur tend vers 0^-), et $-\infty$ en -1^+. La forme obtenue à la question 1 permet par ailleurs d'obtenir très rapidement $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=2$, la courbe admet donc une asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$.
   La dérivée de f vaut $f'(x)=\dfrac{2}{(x+1)^2}$, la fonction est donc strictement croissante sur $]-\infty;-1[$ et sur $]-1;+\infty[$. De plus, $f''(x)=-\dfrac{4}{(x+1)^3}$, donc la fonction f est convexe sur $]-\infty;-1[$ et concave sur $]-1;+\infty[$.

   (c) On a $f(x)-x=\dfrac{2x-x^2-x}{x+1}=\dfrac{x(1-x)}{x+1}$, donc f admet pour points fixes $x=0$ et $x=1$. De plus, la courbe est en-dessous de la droite d'équation $y=x$ sur $]-1;0[$ et sur $[1;+\infty[$, et au-dessus sur $]-\infty;-1[$ et sur $[0;1[$ (encore un tableau de signes pour ceux qui doutent).

   (d) Si $x\in\left[\dfrac{1}{2};1\right]$, $\dfrac{9}{4}\leqslant(x+1)^2\leqslant 4$, donc $\dfrac{1}{2}\leqslant f'(x)\leqslant\dfrac{8}{9}$, ce qui implique bien l'inégalité demandée.

   (e) Voici la courbe, avec les premiers termes de la suite (u_n).



2. (a) Cf courbe précédente.

   (b) Calculons donc : $u_1 = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$; $u_2 = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{4}{5}$; $u_3 = \frac{\frac{8}{5}}{\frac{9}{5}} = \frac{8}{9}$, et $u_4 = \frac{\frac{16}{9}}{\frac{17}{9}} = \frac{16}{17}$.

   (c) C'est une récurrence assez évidente : $u_0 = \frac{1}{2} \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, et en supposant que u_n appartient à cet intervalle, $u_{n+1} = f(u_n) \in \left[f\left(\frac{1}{2}\right); f(1)\right] = \left[\frac{2}{3}; 1\right]$ car la fonction f est croissante sur cet intervalle. Comme $\left[\frac{2}{3}; 1\right] \subset \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, la propriété est bien héréditaire.

   (d) Comme $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n \geqslant 0$ puisque $u_n \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, intervalle sur lequel $f(x) - x \geqslant 0$, la suite (u_n) est croissante. Étant majorée par 1, elle converge. Sa limite ne peut être que 0 ou 1 puisqu'il s'agit d'un point fixe de la fonction f. Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_0 = \frac{1}{2}$, donc la suite ne peut pas converger vers 0. Elle a donc pour limite 1.

   (e) Commençons par appliquer l'IAF entre $x = 1$ et $y = u_n$, qui appartiennent tous deux à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ sur lequel on a majoré $|f'|$ par $\frac{8}{9}$. On peut donc en déduire que $|f(u_n) - f(1)| \leqslant \frac{8}{9}|u_n - 1|$, soit $|u_{n+1} - 1| \leqslant \frac{8}{9}|u_n - 1|$

3. (a) Effectuons donc une petite récurrence : c'est manifestement vrai pour u_0, en posant $p_0 = 1$ et $p_1 = 2$. Supposons donc que $u_n = \frac{p_n}{q_n}$, alors $u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n + 1} = \frac{2\frac{p_n}{q_n}}{\frac{p_n}{q_n} + 1} = \frac{2p_n}{p_n + q_n}$ (en mettant au même dénominateur et en simplifiant. Ca fonctionne donc très bien, en constatant qu'il suffit de poser $p_{n+1} = 2p_n$ et $q_{n+1} = p_n + q_n$.

   (b) C'est absolument évident puisque $A\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2p_n \\ p_n + q_n \end{pmatrix}$. Il ne reste plus qu'à reprendre la fin de la question précédente.

   (c) Encore une récurrence ! C'est vrai pour $n = 1$ en posant $a_1 = 1$ (et même pour $n = 0$ en posant $a_0 = 0$). En supposant la propriété vraie au rang n, on a alors $A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ 2a_n + 1 & 1 \end{pmatrix}$. Cette matrice est bien de la forme attendue, avec $a_{n+1} = 2a_n + 1$.

(d) La suite (a_n) est arithmético-géométrique, d'équation de point fixe $x = 2x+1$, ce qui donne $x = -1$. Posons donc $b_n = a_n+1$, on a alors $b_{n+1} = a_{n+1}+1 = 2a_n+1+1 = 2(a_n+1) = 2b_n$. La suite (b_n) est donc géométrique de raison 2 et de premier terme $b_0 = a_0 + 1 = 1$. On a donc $b_n = 2^n$ et $a_n = b_n - 1 = 2^n - 1$.

(e) La matrice P est certainement inversible puisqu'elle est triangulaire et ne possède pas de 0 sur la diagonale. Pour l'inverser, une seule opération nécessaire, il suffit de remplacer L_2 par $L_2 - L_1$ pour transformer P en I. En effectuant la même opération sur la matrice identité, on obtient donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(f) C'est, pour changer, une récurrence. Pour $n = 1$, comme $D = P^{-1}AP$, en multipliant par P à gauche et P^{-1} à droite, on a $PDP^{-1} = PP^{-1}APP^{-1} = A$, ce qui est la formule attendue. Supposons désormais $A^n = PD^nP^{-1}$, en utilisant le calcul précédent, on a alors $A^{n+1} = A^n \times A = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$.

(g) On calcule $P^{-1}A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ puis $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a donc sans difficulté $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, puis $PD^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 2^n & 1 \end{pmatrix}$, et enfin $A^n = P^{-1}D^nP = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 2^n - 1 & 1 \end{pmatrix}$, ce qui est bien la même formule que plus haut.

(h) Il ne reste plus qu'à calculer $A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n \\ 2^n + 1 \end{pmatrix}$, et à en déduire que $p_n = 2^n$, $q_n = 2^n + 1$, et donc $u_n = \dfrac{2^n}{2^n + 1} = 1 - \dfrac{1}{2^n + 1}$ (on remarque que la convergence de u_n vers 1 est assez évidente au vu de sa formule explicite).

(i) On a $|u_n - 1| \leqslant 10^{-3}$ dès que $\dfrac{1}{2^{n+1}} \leqslant \dfrac{1}{1\ 000}$, soit $2^n \geqslant 500$. Cela se produit pour $n = 9$ (en effet, $2^9 = 512$), une valeur nettement inférieure à celle obtenue dans la deuxième partie. Comme quoi l'IAF est utile mais ne donne pas des résultats très précis.