Devoir Surveillé n°7

ECE3 Lycée Carnot

5 avril 2011

Durée : 4H. Calculatrices interdites.

Exercice 1

On considère deux fonctions f et g par $f(x) = x + 1 + \dfrac{x - 1 + \ln x}{x^2}$ et $g(x) = x^3 - x + 3 - 2\ln x$.

1. Étudier les variations de la fonction g et en déduire que $g(x) > 0$ sur son domaine de définition.
2. Déterminer les limites et éventuelles branches infinies de f.
3. Déterminer la position relative de la courbe représentative de f et de la droite d'équation $y = x + 1$.
4. Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$ et en déduire les variations de f.
5. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathcal{D}_f$ et que $\alpha \in \left]\dfrac{1}{2}; 1\right[$.

Exercice 2

Soit h la fonction définie par $h(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) - 2x$.

1. Déterminer le domaine de définition de h.
2. Montrer que h est impaire.
3. Démontrer que h est dérivable sur son domaine de définition et que $h'(x) = 2\dfrac{x^2}{1-x^2}$.
4. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe représentative de h en son point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$.
5. Dresser le tableau de variation de h en précisant ses limites aux bornes de son domaine de définition.
6. Calculer h'' et étudier la convexité de h.
7. Montrer que, $\forall x \in \left[0; \dfrac{1}{2}\right]$, $0 \leqslant h'(x) \leqslant \dfrac{2}{3}$.
8. Tracer une courbe représentative soignée de h, ainsi que de la tangente T (on donne $\ln 3 \simeq 1.1$).
9. On définit une suite (u_n) par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = h(u_n)$.
   (a) Montrer que l'intervalle $\left[0; \dfrac{1}{2}\right]$ est stable par h, et en déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[0; \dfrac{1}{2}\right]$.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1}| \leqslant \dfrac{2}{3}|u_n|$, puis en déduire que $|u_n| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.
   (c) En déduire la limite de la suite (u_n).

10. Écrire un programme PASCAL calculant la valeur de u_n pour un entier n choisi par l'utilisateur, puis un programme calculant la plus petite valeur de n pour laquelle $u_n \leqslant \varepsilon$, la valeur de ε étant choisie par l'utilisateur.

Exercice 3

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$.

1. **Étude de la fonction f.**
   (a) Déterminer deux réels a et b tels que $f(x) = a + \dfrac{b}{x+1}$.
   (b) Faire une étude complète de f (variations, branches infinies, convexité).
   (c) Déterminer les points fixes de f, ainsi que le signe de $f(x) - x$.
   (d) Montrer que, $\forall x \in \left[\dfrac{1}{2}; 1\right]$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{8}{9}$.
   (e) Tracer la courbe représentative de f en prenant en compte tous les calculs effectués dans cette partie.
2. **Une suite récurrente.**
   (a) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Représenter sur le graphique précédent les cinq premiers termes de la suite (u_n).
   (b) Calculer ces cinq premiers termes.
   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\dfrac{1}{2}; 1\right]$.
   (d) Déterminer la monotonie de la suite (u_n), et en déduire sa convergence vers une limite à préciser.
   (e) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 1| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{8}{9}\right)^n$.
   (f) En déduire un entier n_0 à partir duquel $|u_n - 1| \leqslant 10^{-3}$ (on donne $\log 2 \simeq 0.3$ et $\log \dfrac{8}{9} \simeq -0.05$).
3. **Un peu de calcul matriciel.**
   (a) Montrer que u_n peut s'écrire, pour tout entier n, sous la forme $\dfrac{p_n}{q_n}$, où (p_n) et (q_n) sont deux suites d'entiers.
   (b) On note désormais A la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déduire des calculs de la question précédente que $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$, puis prouver que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
   (c) Montrer que, pour tout entier n, il existe un réel a_n tel que $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ a_n & 1 \end{pmatrix}$.
   (d) Calculer la valeur de a_n, et en déduire la matrice A^n.
   (e) On introduit désormais une deuxième matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
   (f) On note $D = P^{-1}AP$. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
   (g) Calculer D et retrouver ainsi l'expression de A^n calculée un peu plus haut.
   (h) En déduire les valeurs de p_n, q_n puis u_n en fonction de n.
   (i) Déterminer le plus petit entier n pour lequel $|u_n - 1| \leqslant 10^{-3}$ et comparer le résultat obtenu à celui de la dernière question de la deuxième partie.