Devoir Surveillé n°6 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

15 mars 2011

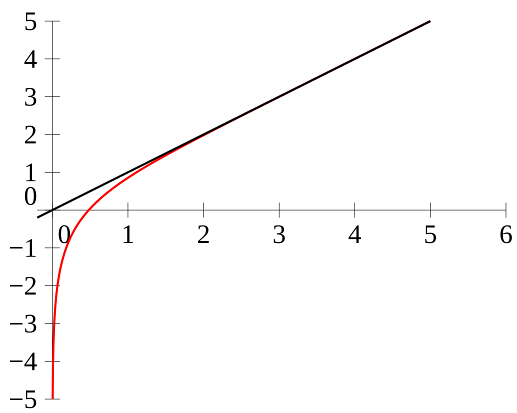
Exercice 1

1. (a) Pour que f soit définie, il faut avoir $e^x - e^{-x} > 0$, soit $e^x > e^{-x}$, ou encore $x > -x$ puisque la fonction exponentielle est croissante. Cela donne $2x > 0$, donc $\mathcal{D}_k =]0; +\infty[$.

   (b) Comme $\lim\limits_{x\to 0} e^x - e^{-x} = 0$, on a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$. En $+\infty$, $e^x - e^{-x}$ tend vers $+\infty$, donc f aussi. De plus, $f(x) = \ln(e^x(1-e^{-2x})) = x + \ln(1-e^{-2x})$. On en déduit que $\dfrac{f(x)}{x} = 1 + \dfrac{\ln(1-e^{-2x})}{x}$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1-e^{-2x}) = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$. On calcule donc $f(x) - x = \ln(1-e^{-2x})$, dont on a déjà vu que ça tendait vers 0 en $+\infty$. Conclusion : f admet en $+\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = x$.

   (c) Encore une fois, on reprend $f(x) - x = \ln(1-e^{-2x})$. Comme $1 - e^{-2x} < 1$, cette expression est négative, donc la courbe de f est toujours en-dessous de son asymptote.

   (d) Dérivons donc f : $f'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$. Cette dérivée est strictement positive sur $]0; +\infty[$, la fonction f est donc strictement croissante. Voici la courbe de f :



2. (a) On a vu que la fonction f était strictement croissante et continue, elle est donc bijective de $]0; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$ (au vu du calcul des limites). L'équation $f(x) = n$ a donc une unique solution quelle que soit la valeur de n.

   (b) Puisque $f(u_n) < f(u_{n+1})$, la fonction f étant croissante, $u_n < u_{n+1}$, et la suite est strictement croissante.

   (c) D'après le théorème de la bijection, la réciproque f^{-1} de f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$. Or, on a $u_n = f^{-1}(n)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

3. (a) Par définition de u_n, on a $u_n - n = u_n - f(u_n)$. Or on a vu que $\lim\limits_{x\to+\infty} x - f(x) = 0$. La suite (u_n) ayant pour limite $+\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - n = 0$. De plus, $u_n - n = -\ln(1-e^{-2u_n})$. Comme e^{-2u_n} tend vers 0, on peut appliquer l'équivalent classique de $\ln(1+x)$ en 0 pour obtenir $u_n - n \sim e^{-2u_n}$. Or, $u_n = n + o(1)$, donc $e^{-2u_n} = e^{-2n+o(1)} = e^{-2n}e^{o(1)} \sim e^{-2n}$ puisque l'exponentielle de quelque chose qui tend vers 0 tend vers 1.

(b) On sait en fait résoudre l'équation $\ln(e^x - e^{-x}) = n$: elle équivaut à $e^x - e^{-x} = e^n$ soit, après multiplication par e^x, $e^{2x} - e^n e^x - 1 = 0$. En posant $X = e^x$, on se ramène à l'équation du second degré $X^2 - e^n X - 1 = 0$. Celle-ci a pour discriminant $\Delta = e^{2n} + 4$ (toujours positif) et admet donc deux racines $X_1 = \dfrac{e^n + \sqrt{e^{2n}+4}}{2}$, et X_2 qu'on oubliera car elle est négative. On revient à $x = \ln X = \ln\left(\dfrac{e^n + \sqrt{e^{2n}+4}}{2}\right)$, qui est donc la valeur exacte de u_n.

Exercice 2 (d'après ESC 2005)

1. Après un seul tirage, deux situations possible : on a tiré une boule rouge avec probabilité et on a alors $Y_1 = 1$; ou on a tiré une boule bleue avec probabilité $\dfrac{1}{3}$ et on garde $Y_1 = 2$. On a donc $P(Y_1 = 2) = \dfrac{1}{3}$ et $P(Y_1 = 1) = \dfrac{2}{3}$, d'où $E(Y_1) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3}$; puis $E(X^2) = \dfrac{4}{3} + \dfrac{2}{3} = 2$, donc d'après la formule de König-Huygens $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2 - \dfrac{16}{9} = \dfrac{2}{9}$.
2. On a en général $Y_n(\Omega) = \{0; 1; 2\}$ (puisqu'il y a remise tant qu'on tire des boules bleues, on peut garder 2 boules rouges autant de temps qu'on le veut).
3. Pour avoir $Y_n = 2$, il faut tirer la boule bleue n fois de suite (il y aura toujours une seule boule bleue dans l'urne dans ce cas), ce qui se produit avec une probabilité de $\dfrac{1}{3^n}$.
4. (a) Pour avoir $Y_2 = 1$, il faut soit tirer la boule bleue puis une rouge, ce qui se produit avec une probabilité $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{9}$; soit une rouge puis une des deux bleues qui sont alors dans l'urne, ce qui se produit avec une probabilité $\dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3}$. Au total on a bien $P(Y_2 = 1) = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$.

   (b) Commençons par noter que $P_{Y_n=0}(Y_{n+1} = 1) = 0$, $P_{Y_n=1}(Y_{n+1} = 1) = \dfrac{2}{3}$ (puisqu'il y a alors deux boules bleues dans l'urne) et $P_{Y_n=2}(Y_{n+1} = 1) = \dfrac{2}{3}$ (puisqu'il y a cette fois-ci deux boules rouges dans l'urne). Les évènements $Y_n = 0$, $Y_n = 1$ et $Y_n = 2$ forment un système complet d'évènements. On peut donc appliquer la formule des probabilités totales pour obtenir $u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3^n}$, ce qui donne bien la formule souhaitée. Pour $n = 1$, on a $\dfrac{2}{3}u_1 + \dfrac{2}{3^2} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{9} = \dfrac{6}{9} = u_2$. La relation est donc également vraie pour $n = 1$.

   (c)
```
PROGRAM suite;
USES wincrt;
VAR n,i : integer; u,a : real;
BEGIN
WriteLn('Choissez l'entier n');
ReadLn(n);
u := 2/3; a := 2/9;
FOR i := 2 TO n DO
BEGIN
u := 2*u/3+a;
a := a/3;
END;
WriteLn('u_n=',u);
END.
```

   (d) Calculons donc $v_{n+1} = u_{n+1} + \dfrac{2}{3^{n+1}} = \dfrac{2}{3}u_n + \dfrac{4}{3^{n+1}} = \dfrac{2}{3}\left(u_n + \dfrac{2}{3^n}\right) = \dfrac{2}{3}v_n$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$.

   (e) Comme $v_1 = u_1 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3}$, on obtient $v_n = \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} = \dfrac{2^{n+1}}{3^n}$, puis $u_n = \dfrac{2^{n+1} - 2}{3^n}$.

(f) On a bien sûr $P(Y_n = 0) = 1 - P(Y_n = 2) - P(Y_n = 1) = 1 - \dfrac{1}{3^n} - \dfrac{2^{n+1} - 2}{3^n} = \dfrac{3^n - 2^{n+1} + 1}{3^n}$.

(g) Par définition, $E(Y_n) = \dfrac{2^{n+1} - 2}{3^n} + \dfrac{2}{3^n} = \dfrac{2^{n+1}}{3^n}$.

(h) i. On a simplement $A_n = (Y_n = 0) \cap (Y_{n-1} = 1)$.

ii. On en déduit que $P(A_n) = P(Y_{n-1} = 1) \times P_{Y_{n-1}=1}(Y_n = 0) = \dfrac{1}{3}P(Y_{n-1} = 1) = \dfrac{2^n - 2}{3^n}$.

iii. Calculons donc (ce sont des séries géométriques toutes bêtes) : $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} P(A_n) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n - 2\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n =$ $\dfrac{1}{1-\frac{2}{3}} - 1 - \dfrac{2}{3} - 2\left(\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1 - \dfrac{1}{3}\right) = 3 - \dfrac{5}{3} - 3 + \dfrac{8}{3} = 1$. Cela revient à dire que la probabilité qu'on finisse par tirer la dernière boule blanche vaut 1. Autrement dit, il est quasiment certain qu'on finira par tirer les deux boules rouges.

Exercice 3 (d'après ESSEC Techno 2005)

1. (a) Il y a $\dbinom{2n}{n}$ tirages possibles au total (l'ordre n'a aucune importance ici), dont un seul donnant toutes les boules numéro 0, donc la probabilité demandée vaut $\dfrac{1}{\binom{2n}{n}}$.

(b) Si on impose que la boule numéro i soit tirée, il reste à choisir $n-1$ boules parmi les $2n-1$ restantes, donc la probabilité de tirer le numéro i vaut $\dfrac{\binom{2n-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}} = \dfrac{(2n-1)!}{(n-1)!n!} \times \dfrac{n!^2}{(2n)!} = \dfrac{n}{2n} = \dfrac{1}{2}$ (plutôt logique puisqu'on tire la moitié des boules de l'urne).

(c) Si $n \leqslant 3$, cette probabilité vaut bien sûr 1. Dans le cas contraire, il y a $n+3$ boules dont le numéro n'atteint pas 4, donc la probabilité vaut $\dfrac{\binom{n+3}{n}}{\binom{2n}{n}} = \dfrac{(n+3)!}{6n!} \times \dfrac{n!^2}{(2n)!} = \dfrac{n!(n+3)!}{6(2n)!}$. Pour $n = 6$, on obtient $\dfrac{6! \times 9!}{6 \times 12!} = \dfrac{6!}{6 \times 10 \times 11 \times 12} = \dfrac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{10 \times 11 \times 12} = \dfrac{1}{11}$.

2. (a) La variable X_i suit bien sûr une loi binômiale, et au vu de la question 1.*b*, son paramètre vaut $\dfrac{1}{2}$. On a donc $E(X_i) = \dfrac{1}{2}$ et $V(X_i) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$.

(b) La variable X_iX_j est aussi une variable de Bernoulli (quand on multiplie des 0 et des 1, on ne peut pas obtenir autre chose que 0 ou 1), et $P(X_iX_j = 1) = P((X_i = 1) \cap (X_j = 1))$. Cet évènement se produit si on tire simultanément les boules i et j, ce qui laisse $\dbinom{2n-2}{n-2}$ choix pour les boules restantes. On a donc $P(X_iX_j = 1) = \dfrac{\binom{2n-2}{n-2}}{\binom{2n}{n}} = \dfrac{(2n-2)!}{(n-2)!n!} \times \dfrac{n!^2}{(2n)!} = \dfrac{n(n-1)}{(2n(2n-1)} = \dfrac{n-1}{2(2n-1)}$. Comme $P(X_i = 1) \times P(X_j = 1) = \dfrac{1}{4} \neq \dfrac{n-1}{2(2n-1)}$, les deux évènements ne sont pas indépendants.

3. (a) La variable iX_i vaut i si la boule numéro i est tirée, 0 sinon. En faisant la somme de ces variables, on obtient donc la somme des numéros tirés (les boules 0 n'ayant évidemment aucune influence sur cette somme).

(b) Par linéarité, $E(S) = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} iE(X_i) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{i}{2} = \frac{n(n+1)}{4}$.

(c) On veut avoir $\dfrac{n(n+1)}{4} \geqslant 30$, soit $n(n+1) \geqslant 120$. Les plus courageaux iront résoudre l'inéquation du second degré, les autres constateront que $n(n+1)$ est croissant sur $\mathbb{N}$, que $10 \times 11 < 120$ mais $11 \times 12 > 120$. Il faut donc avoir $n \geqslant 11$.

4. (a) Comme il y a n boules portant le numéro 0 et n ne le portant pas, le nombre de tirages vérifiant $Z = k$ est de $\dbinom{n}{k} \times \dbinom{n}{n-k}$ (k boules choisies dans le premier lot, $n-k$ dans le deuxième), ou

encore $\binom{n}{k}^2$ en utilisant la symétrie des coefficients binômiaux. On a donc $P(Z=k) = \frac{\binom{n}{k}^2}{\binom{2n}{n}}$. Comme Z prend ses valeurs entre 0 et n, on aura $\sum_{k=0}^{k=n} P(Z=k) = 1$, ce qui donne bien (en faisant passer le dénominateur constant à droite) $\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ (qui n'est autre qu'un cas particulier de la formule de Vandermonde).

(b) Si $n=2$, on a $\binom{2n}{n} = \binom{4}{2} = 6$; et $\binom{2}{0} = \binom{2}{2} = 1$ et $\binom{2}{1} = 2$, d'où $P(Z=0) = P(Z=2) = \frac{1}{6}$ et $P(Z=1) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. On en déduit $E(Z) = 1$ (la loi est symétrique), puis $E(Z^2) = \frac{4}{6} + \frac{4}{6} = \frac{4}{3}$, donc, via König-Huygens, $V(Z) = \frac{4}{3} - 1^2 = \frac{1}{3}$.

(c) On a manifestement $X+Z=n$, donc $X = n-Z$. Or, Z et X suivent la même loi (même raisonnement pour calculer la loi de X que pour celle de Z), donc ont la même espérance. Par linéarité, on obtient donc $2E(X) = n$, soit $E(X) = E(Z) = \frac{n}{2}$.

(d) Par ailleurs, $X = \sum_{i=1}^{i=n} X_i$, donc $E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$.

(e) En revenant à la définition, $E(Z) = \sum_{i=1}^{i=n} i \frac{\binom{n}{i}^2}{\binom{2n}{n}}$. On peut faire démarrer la somme à $i=0$ (ça ne change rien) et faire passer la constante du dénominateur de l'autre côté pour obtenir, en utlisant la valeur de $E(Z)$, $\sum_{i=0}^{i=n} i \binom{n}{i}^2 = \frac{n}{2}\binom{2n}{n}$.