Devoir Surveillé n°6

ECE3 Lycée Carnot

15 mars 2010

Durée : 4H. Calculatrices interdites.

Exercice 1

Dans tout cet exercice, on considre la fonction f définie par $f(x) = \ln(e^x - e^{-x})$.

1. Étude de la fonction f.
   (a) Déterminer le domaine de définition de f.
   (b) Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$, et étuder la branche infinie de f en $+\infty$.
   (c) Déterminer la position de la courbe représentative de f par rapport à la droite d'équation $y = x$.
   (d) Étudier les variations de f, puis tracer sa courbe en tenant compte de tous les calculs effectués dans cette première partie.
2. On s'intéresse désormais, pour un entier $n \in \mathbb{N}$, à l'équation $f(x) = n$.
   (a) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, cette équation admet une unique solution, que l'on notera u_n.
   (b) Déterminer la monotonie de la suite (u_n).
   (c) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
3. Comportement asymptotique de (u_n).
   (a) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - n = 0$ (on pourra réutiliser les calculs effectués au moment de l'étude des branches infinies), et déterminer un équivalent simple de $u_n - n$.
   (b) En revenant à sa définition, déterminer une valeur explicite de u_n.

Exercice 2 (d'après ESC 2005)

Une urne contient initialement deux boules rouges et une boule bleue indiscernables au toucher. On effectue dans cette urne une suite (infinie) de tirages, avec les conditions suivantes :

- Si la boule tirée est bleue , on la remet dans l'urne.
- Si la boule tirée est rouge , on ne la remet pas dans l'urne mais on remet une boule bleue dans l'urne à sa place.

Pour tout entier naturel n non nul , on note Y_n la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges présentes dans l'urne après n tirages. On notera pour chaque entier naturel k non nul les évènements suivants : R_k : « Lors du k-ème tirage, on tire une boule rouge dans l'urne », et B_k : »Lors du k-ème tirage, on tire une boule bleue dans l'urne ».

1. Donner la loi de probabilité de Y_1, ainsi que son espérance et sa variance.
2. Quelles sont les valeurs possibles prises par Y_n dans le cas où n est supérieur ou égal à 2 ?
3. Calculer pour tout entier naturel non nul n, $P(Y_n = 2)$.
4. On pose, pour tout entier naturel non nul n , $u_n = P(Y_n = 1)$.
   (a) Montrer que $u_2 = \dfrac{2}{3}$.

(b) Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3^{n+1}}$. Cette relation reste-t-elle valable lorsque $n = 1$?

(c) On pose pour tout entier naturel n non nul $v_n = u_n + \frac{2}{3^n}$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ est géométrique.

(d) En déduire la valeur de v_n, puis celle de u_n.

5. Déduire des résultats précédents $P(Y_n = 0)$ pour tout entier naturel non nul n.
6. Calculer l'espérance de Y_n.
7. On note désormais A_n l'évènement : « La dernière boule rouge est tirée au n-ème tirage ».
   (a) Exprimer l'évènement A_n en fonction d'évènements faisant intervenir les variables Y_n et Y_{n-1}.
   (b) En déduire la valeur de $P(A_n)$.
   (c) Calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} P(A_n)$. Comment interpréter le résultat obtenu ?

Exercice 3 (d'après ESSEC Techno 2005)

Une urne contient $2n$ boules, parmi lesquelles n sont numérotées de 1 à n, et les n restantes portent le numéro 0. On tire simultanément dans cette urne n boules.

1. Quelques calculs de probabilités.
   (a) Quelle est la probabilité de ne tirer que des boules portant le numéro 0 ?
   (b) Soit $i \in \{1;\ldots;n\}$. Déterminer la probabilité que la boule numéro i fasse partie des n boules tirées (simplifier le résultat).
   (c) Déterminer la probabilité qu'aucun numéro supérieur ou égal à 4 ne soit tiré. Calculer explicitement cette probabilité lorsque $n = 6$.
2. Pour tout entier $i \in \{1;\ldots;n\}$, on note désormais X_i la variable valant 1 si la boule numéro i a été tirée, 0 sinon.
   (a) Quelle est la loi de la variable X_i ? Préciser l'espérance et la variance de X_i.
   (b) Soient i et j deux entiers distincts compris entre 1 et n. Déterminer la loi et l'espérance de la variable X_iX_j. Les évènements $X_i = 1$ et $X_j = 1$ sont-ils indépendants ?
3. On définit désormais une nouvelle variable aléatoire $S = \sum_{i=1}^{i=n} iX_i$.
   (a) Que représente la variable S ?
   (b) Calculer l'espérance de S.
   (c) Quelle est la plus petite valeur de n pour laquelle la somme des numéros obtenus devient en moyenne supérieure ou égale à 30 ?
4. On définit deux nouvelles variables aléatoires : Z est égale au nombre de boules tirées portant le numéro 0, et X le nombre de boules tirées ne portant pas le numéro 0.
   (a) Déterminer la loi de Z, en déduire que $\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.
   (b) Déterminer l'espérance et la variance de Z dans le cas particulier où $n = 2$.
   (c) Quel lien y a-t-il entre X et Z ? En déduire les valeurs des espérances de X et de Z.
   (d) Retrouver l'espérance de X en exprimant X à l'aide des variables X_i.
   (e) Déduire de la valeur de $E(Z)$ une expression simple pour $\sum_{k=0}^{k=n} k\binom{n}{k}^2$.