Exercice 1 (d'après Ecricome ECT 2004)

1. (a) C'est une application de la formule des probabilités totales (ou si vous préférez, on fait un petit arbre) : la probabilité demandée vaut $\frac{60}{100} \times \frac{1}{5} + \frac{40}{100} \times \frac{1}{10} = \frac{12}{100} + \frac{4}{100} = \frac{16}{100}$.

   (b) Notons R l'évènement « Le colis arrive en retard ». On vient de voir que $P(R) = \frac{16}{100}$. De plus, $P_A(R) = \frac{1}{10}$, et $P(A) = \frac{4}{10}$. Par la formule de Bayes, $P_R(A) = \frac{\frac{4}{10} \times \frac{1}{10}}{\frac{16}{100}} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

2. (a) Puisqu'un colis a quatre chances sur cinq d'arriver à l'heure, pour trois jours de suite, la probabilité de n'avoir aucun retard vaut $\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125}$ (un peu plus d'une chance sur deux).

   (b) Pour trois colis en retard, facile, ça vaut $\frac{1}{125}$. Pour un colis en retard, il ne faut pas oublier le choix du jour du retard, ce qui donne $3 \times \frac{1}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{48}{125}$. De même, pour deux jours de retard, la probabilité vaut $\binom{3}{2} \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 \times \frac{4}{5} = \frac{12}{125}$. On peut vérifier que la somme des quatre dernières probabilités calculées vaut 1, ce qui est rassurant.

   (c) Pour avoir moins de 15 euros de facture, il faut qu'il y ait eu au moins deux retards, soit une probabilité de $\frac{12}{125} + \frac{1}{125} = \frac{13}{125}$ (à peine plus d'une chance sur 10).

3. (a) Puisque c'est la société A qui livre au jour 0, le colis a une chance sur 10 d'être en retard (auquel cas on passera à B), et on a donc $u_1 = \frac{9}{10}$.

   (b) Déterminons plutôt la probabilité de l'événement contraire : on ne fera appel à la société B pour les jours 1 à 5 si les cinq premiers colis livrés par A (ceux des jours 0 à 4) arrivent à l'heure, soit une probabilité de $\left(\frac{9}{10}\right)^5 = \frac{59\ 049}{100\ 000}$ (valeur non attendue, évidemment). La probabilité qu'on utilise B avant le jour 5 vaut donc $1 - \left(\frac{9}{10}\right)^5$.

   (c) C'est une application de la formule des probabilités totales. Si on note A_n et B_n les évènements correspondant aux livraisons par A et B au jour n, on a $P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{9}{10}$ (il faut que le colis soit à l'heure) et $P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{5}$ (il faut que le colis soit en retard pour changer de livreur) donc $P(A_{n+1}) = \frac{9}{10}P(A_n) + \frac{1}{5}(1 - P(A_n))$, soit $u_{n+1} = \frac{9}{10}u_n + \frac{1}{5}(1 - u_n) = \frac{7}{10}u_n + \frac{2}{10}$.

   (d) On reconnait bien sûr une suite arithmético-géométrique, dont l'équation de point fixe $x = \frac{7}{10}x + \frac{2}{10}$ donne $x = \frac{2}{3}$. On pose donc $v_n = u_n - \frac{2}{3}$, et $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{7}{10}u_n + \frac{2}{10} - \frac{2}{3} = \frac{7}{10}u_n - \frac{14}{30} = \frac{7}{10}\left(u_n - \frac{2}{3}\right)$. Comme $v_0 = u_0 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, on a $v_n = \frac{1}{3} \times \left(\frac{7}{10}\right)^n$, puis $u_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \left(\frac{7}{10}\right)^n$. La limite de la suite vaut $\frac{2}{3}$ (ce qui est cohérent car les colis livrés par A sont deux fois moins souvent en retard que ceux de B).

Exercice 2

1. (a) Après un tirage on a forcément tiré une seule boule donc $a_1 = 1$ et $b_1 = c_1 = 0$. Après deux tirages on a toujours $c_2 = 0$, mais $a_2 = \frac{1}{3}$ (une chance sur trois de retomber sur la même boule) et $b_2 = \frac{2}{3}$.

(b) Commençons par la fin, c'est plus simple : si on a déjà tiré les trois boules après n tirages, ce sera toujours le cas après $n+1$, donc $P_{C_n}(C_{n+1}) = 1$ et $P_{C_n}(A_{n+1}) = P_{C_n}(B_{n+1}) = 0$. Si on a tiré seulement deux boules après n tirages, il y a une chance sur trois de tirer la boule non encore tirée, donc $P_{B_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{3}$; $P_{B_n}(B_{n+1}) = \frac{2}{3}$ et $P_{B_n}(A_{n+1}) = 0$. De même, on obtient $P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{3}$; $P_{A_n}(B_{n+1}) = \frac{2}{3}$ et $P_{A_n}(C_{n+1}) = 0$.

(c) Via la formule des probabilités totales (les évènements A_n, B_n et C_n formant évidemment un système complet), on obtient facilement, en utilisant les résultats de la question précédente, $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n$; puis $b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{2}{3}b_n$ et enfin $c_{n+1} = \frac{1}{3}b_n + c_n$. Il suffit donc de poser $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$ pour obtenir la relation souhaitée.

(d) C'est la récurrence débile qu'on vous demande de faire à chaque fois. C'est vrai au rang 0, et si on le suppose au rang n, alors $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M.M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$, ce qui achève la récurrence.

2. (a) On obtient $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}$

(b) Cela se prouve évidemment par récurrence. C'est certainement vrai au rang 1 en posant $u_1 = 2$, $v_1 = 0$ et $t_1 = 1$ (il suffit de regarder A). Si on le suppose vrai au rang n, en multipliant cette matrice par A, on a $A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u_n + 2^{n+1} & 2^{n+1} & 0 \\ v_n + 2t_n & 2t_n + 3^n & 3^{n+1} \end{pmatrix}$. Tout cela fonctionne parfaitement, avec les relations $u_{n+1} = u_n + 2^{n+1}$; $v_{n+1} = v_n + 2t_n$ et $t_{n+1} = 2t_n + 3^n$.

(c) D'après la question précédente, $u_{n+1} - u_n = 2^{n+1}$, donc $\sum_{i=1}^{i=n-1} u_{i+1} - u_i = \sum_{i=1}^{i=n-1} 2^{i+1} = \sum_{i=2}^{i=n} 2^i = \frac{1 - 2^{n+1}}{1-2} - 1 - 2 = 2^{n+1} - 4$. Par ailleurs, la somme qu'on vient de calculer est télescopique, et égale à $u_n - u_1$. Conclusion : $u_n = u_1 + 2^{n+1} - 4 = 2^{n+1} - 2$.

(d) Le principe est le même, la somme télescopique vaut $\frac{t_n}{2^n} - \frac{t_1}{2}$, mais est aussi égale à $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{2t_i + 3^i}{2^{i+1}} - \frac{t_i}{2^i} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{3}{2}\right)^i = \frac{1}{2}\left(\frac{1 - (\frac{3}{2})^n}{1 - \frac{3}{2}} - 1\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^n - \frac{3}{2}$, d'où finalement en multipliant tout par 2^n, $t_n = 2^{n-1}t_1 + 3^n - 3 \times 2^{n-1} = 3^n - 2 \times 2^{n-1} = 3^n - 2^n$.

3. (a) Comme $M = \frac{1}{3}A$, on aura évidemment $M^{n-1} = \frac{1}{3^{n-1}}A^{n-1}$. Il ne reste plus qu'à multiplier tout ça par la matrice colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire à garder la première colonne de la matrice M^{n-1}, ce qui donne $a_n = \frac{1}{3^{n-1}}$; $b_n = \frac{2^n - 2}{3^{n-1}}$ et $c_n = 1 - \frac{2^n - 1}{3^{n-1}}$.

(b) Les deux premières suites ont pour limite 0 (somme de suites géométriques de raison inférieure à 1), la dernière tend vers 1. Cela parait tout à fait normal : quand on fait plein de tirages, la probabilité de tirer les trois boules se rapproche de 1.

(c) Il faut donc avoir $\frac{1}{3^{n-1}} \leqslant \frac{1}{100}$, soit $3^{n-1} \geqslant 100$, ce qui se produit dès que $n = 6$.