Devoir Surveillé n°5

ECE3 Lycée Carnot

10 février 2011

Durée : 2H. Calculatrices interdites.

Exercice 1 (d'après Ecricome ECT 2004)

Chaque jour, une entreprise livre un colis. Pour cela, elle a le choix entre les services de deux sociétés de transport désignées par les lettres A et B. Les colis livrés par la société A ont une probabilité $\frac{1}{10}$ d'arriver en retard, ceux livrés par la société B ont une probabilité $\frac{1}{5}$ d'arriver en retard.

1. On suppose dans cette question que les colis sont envoyés via la société B dans 60% des cas et par la société A le reste du temps.
   (a) Quelle est la probabilité qu'un colis donné arrive en retard ?
   (b) Un jour, un colis arrive en retard. Quelle est la probabilité que le colis ait été livré par la société A ?
2. On suppose désormais que pendant trois jours de suite, les colis ont été livrés par la société B.
   (a) Déterminer la probabilité qu'aucun des trois colis envoyés ne soit arrivé en retard.
   (b) Déterminer les probabilités respectives qu'un, deux puis trois colis soient arrivés en retard.
   (c) Chaque colis arrivé à l'heure est facturé 8 euros à notre entreprise, et chaque colis en retard 3 euros. Quelle est la probabilité que la facture totale pour ces trois jours ne dépasse pas 15 euros ?
3. On suppose désormais que le choix de la société pour la livraison obéit aux règles suivantes : un certain jour, numéroté jour 0, c'est la société A qui est choisie. À partir de ce jour, l'entreprise conserve la même société de livraison pour le lendemain à chaque fois que le colis arrive à l'heure, mais en change systématiquement si le colis arrive en retard. On note u_n la probabilité que le colis livré au jour n soit livré par la société A.
   (a) Déterminer la valeur de u_1.
   (b) Déterminer la probabilité qu'on fasse appel à la société B avant le jour numéro 5 (jour 5 inclus).
   (c) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{7}{10}u_n + \frac{2}{10}$
   (d) En déduire la valeur de u_n, puis celle de la probabilité que le colis livré au jour n soit livré en retard, ainsi que sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2

Une urne contient une boule jaune, une verte et une rouge. On effectue n tirages successifs avec remise dans l'urne, et on s'intéresse au nombre de boules différentes obtenues à l'issue de ces n tirages. On note ainsi A_n l'évènement « Après n tirages, une seule boule a été tirée », B_n l'évènement « Après n tirages, deux boules distinctes ont été tirées » et C_n l'évènement « À l'issue des n tirages, les trois boules ont été tirées ». On notera également a_n, b_n et c_n les probabilités correspondantes.

1. (a) Déterminer a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 et c_2.
   (b) Calculer les probabilités conditionnelles $P_{A_n}(A_{n+1})$, $P_{A_n}(B_{n+1})$, $P_{A_n}(C_{n+1})$, $P_{B_n}(A_{n+1})$, $P_{B_n}(B_{n+1})$, $P_{B_n}(C_{n+1})$, $P_{C_n}(A_{n+1})$, $P_{C_n}(B_{n+1})$ et $P_{C_n}(C_{n+1})$.
   (c) En déduire l'existence d'une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.
   (d) Prouver que, $\forall n \geqslant 1$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$.
2. On considère dans cette partie la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer A^2.
   (b) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe trois réels u_n, v_n et t_n tels que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u_n & 2^n & 0 \\ v_n & t_n & 3^n \end{pmatrix}$, et déterminer par la même occasion des relations de récurrence vérifiées par les suite (u_n), (v_n) et (t_n).
   (c) En calculant $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} u_{i+1} - u_i$, prouver que $u_n = 2^{n+1} - 2$.
   (d) En vous servant de même de $\displaystyle\sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{t_{i+1}}{2^{i+1}} - \frac{t_i}{2^i}$, déterminer la valeur de t_n.
   On admet qu'on pourrait obtenir similairement $v_n = 3^n - 2^{n+1} + 1$.
3. (a) Exprimer M en fonction de A et en déduire la valeur de M^{n-1}, puis celles de a_n, b_n et c_n.
   (b) Déterminer les limites de ces trois suites. Les résultats obtenus sont-ils logiques ?
   (c) À partir de quelle valeur de n a-t-on plus de 99% de chances d'avoir tiré au moins deux boules différentes ?