Devoir Surveillé n°3 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

30 novembre 2010

Exercice 1

1. (a) Les cinq premières lignes (pour n allant de 0 à 4 si vous préférez) suffisent pour cette question : 1 puis 1 1 puis 1 2 1 puis 1 3 3 1 puis 1 4 6 4 1. On en déduit que $u_0 = \frac{1}{1} = 1$; $u_1 = 1 + 1 = 2$; $u_2 = 1 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{2}$; $u_3 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{8}{3}$ et $u_4 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{8}{3}$.

   (b) On a $\binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n! \times (n-k)}{k!(n-k)! \times (k+1)} = \binom{n}{k} \times \frac{n-k}{k+1}$. Les deux nombres étant positifs, $\binom{n}{k+1}$ sera plus grand que $\binom{n}{k}$ si $\frac{n-k}{k+1} \geqslant 1$, c'est-à-dire si $n - k \geqslant k + 1$, soit $2k \leqslant n - 1$, ce qui donne bien la condition de l'énoncé.

   (c) De la question précédente découle que $\binom{n}{2} \leqslant \binom{n}{3} \leqslant \cdots \leqslant \binom{n}{k}$ pour tout entier k inférieur ou égal à $\frac{n-1}{2}$. Or, en utilisant la symétrie des coefficients binomiaux, on aura de même $\binom{n}{k} \leqslant \binom{n}{k+1} \leqslant \cdots \leqslant \binom{n}{n-2}$ si $k \geqslant \frac{n+1}{2}$. Comme par ailleurs $\binom{n}{n-2} = \binom{n}{2}$, on aura bien pour tous les entiers compris entre 2 et $n-2$, $\binom{n}{k} \leqslant \binom{n}{2}$, d'où en passant à l'inverse la première inégalité demandée. Il suffit ensuite de découper la somme définissant u_n en petits morceaux : $u_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{\binom{n}{k}} = \frac{1}{\binom{n}{0}} + \frac{1}{\binom{n}{1}} + \sum_{k=2}^{k=n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} + \frac{1}{\binom{n}{n-1}} + \frac{1}{\binom{n}{n}} = 1 + \frac{1}{n} +$

$\sum_{k=2}^{k=n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} + \frac{1}{n} + 1 = 2 + \frac{2}{n} + \sum_{k=2}^{k=n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}}$. On en déduit sans problème que $u_n \geqslant 2$, et en utilisant l'inégalité qu'on vient de démontrer, que $u_n \leqslant 2 + \frac{2}{n} + \sum_{k=2}^{k=n-2} \frac{1}{\binom{n}{2}}$.

(d) En explicitant la valeur du coefficient binomial, l'inégalité de droite donne en fait $u_n \leqslant 2 + \frac{2}{n} + \sum_{k=2}^{k=n-2} \frac{2}{n(n-1)} = 2 + \frac{2}{n} + \frac{n-3}{n(n-1)}$. Cette expression ayant pour limite 2 quand n tend vers $+\infty$, le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 2$.

2. (a) Puisque $\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n-1}{k-1}$, on a certainement $\binom{n}{k} \geqslant \binom{n-1}{k-1}$, d'où l'inégalité demandée en passant à l'inverse.

(b) Un peu de courage, calculons la différence des deux termes : $\frac{1}{\binom{n}{1}} + \frac{1}{\binom{n}{2}} - \frac{1}{\binom{n+1}{1}} - \frac{1}{\binom{n+1}{2}} - \frac{1}{\binom{n+1}{3}} = \frac{1}{n} + \frac{2}{n(n-1)} - \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n(n+1)} - \frac{6}{(n-1)n(n+1)}$
$= \frac{(n-1)(n+1) + 2(n+1) - n(n-1) - 2(n-1) - 6}{(n-1)n(n+1)}$
$= \frac{n^2 - 1 + 2n + 2 - n^2 + n - 2n + 2 - 6}{(n-1)n(n+1)} = \frac{n-3}{(n-1)n(n+1)}$ qui est bien positif si $n \geqslant 3$.

(c) En effet, si $n \geqslant 3$, $u_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{\binom{n}{k}} = 1 + \frac{1}{\binom{n}{1}} + \frac{1}{\binom{n}{2}} + \sum_{k=3}^{k=n} \frac{1}{\binom{n}{k}} \leqslant 1 + \frac{1}{\binom{n+1}{1}} + \frac{1}{\binom{n+1}{2}} + \frac{1}{\binom{n+1}{3}} + \sum_{k=3}^{k=n} \frac{1}{\binom{n+1}{k+1}}$. L'expression de droite n'étant autre que celle de u_{n+1}, on aura bien $u_n \geqslant u_{n+1}$ si $n \geqslant 3$, d'où la décroissance de la suite.

3. (a) Il suffit de poser $i = n - k$, le $k!(n+1-k)!$ du numérateur devient alors un $(n-i)!(i+1)!$, le dénominateur ne change pas, et i varie de $n-n$ à $n-0$, c'est-à-dire de 0 à n.

   (b) L'idée est d'additionner la somme initiale avec celle obtenue à la question précédente, et de simplifier : $2\sum_{k=0}^{k=n} \frac{k!(n+1-k)!}{n!}$
   $= \sum_{k=0}^{k=n} \frac{k!(n+1-k)!}{n!} + \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(k+1)!(n-k)!}{n!}$
   $= \sum_{k=0}^{k=n} \left(\frac{(n+1-k) \times k!(n-k)!}{n!} + \frac{(k+1) \times k!(n-k)!}{n!} \right)$
   $= \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(n+1-k+k+1) \times k!(n-k)!}{n!} = (n+2)\sum_{k=0}^{k=n} \frac{k!(n-k)!}{n!}$.

   (c) On a $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{k=n+1} \frac{1}{\binom{n+1}{k}} = \sum_{k=0}^{k=n+1} \frac{k!(n+1-k)!}{(n+1)!}$.En séparant le dernier terme et en utilisant la question précédente,
   $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{k=n} \frac{k!(n+1-k)!}{n!} = 1 + \frac{n+2}{2(n+1)}\sum_{k=0}^{k=n} \frac{k!(n-k)!}{n!} = 1 + \frac{n+2}{2n+2}u_n$.

   (d)
```
PROGRAM cacahouete;
USES wincrt;
VAR u : real; i,n : integer;
BEGIN
WriteLn('Choisissez la valeur de n');
ReadLn(n);
u := 1;
FOR i := 0 TO n-1 DO u := 1+(i+2)*u/(2*i+2);
WriteLn(u);
END.
```

   (e) En utilisant la relation précédente, $v_{n+1} = (n+1)(u_{n+1} - 2) = (n+1)\left(\frac{n+2}{2n+2}u_n - 1\right) = \frac{n+2}{2}u_n - n - 1 = \frac{n}{2}u_n - n + u_n - 1 = \frac{n}{2}(u_n - 2) + u_n - 1 = \frac{1}{2}v_n + u_n - 1$.

En admettant que (v_n) converge vers une limite l, le membre de gauche de cette égalité tend vers l, et celui de droite vers $\frac{1}{2}l+1$ (puisque la suite (u_n) a pour limite 2), donc on doit avoir $l = \frac{1}{2}l+1$, soit $l=2$. On a donc $\lim_{n\to+\infty} n(u_n-2) = 2$, soit $u_n - 2 \sim \frac{2}{n}$.

Exercice 2

1. (a) Il y a 7 dominos doubles et $\binom{7}{2} = 21$ dominos simples, soit au total 28 dominos.

   (b) Il y a donc $\binom{28}{2} = 378$ tirages possibles.

   (c) Il y a $\binom{7}{2} = 21$ tirages constitués de deux dominos doubles, et $7\times 21 = 147$ d'un double et d'un simple.

   (d) Il y a 7 dominos faisant apparaitre le chiffre 1, donc 21 sans chiffre 1, soit $\binom{21}{2} = 210$ tirages convenables.

   (e) Soit on obtient le double 2 et un quelconque des 21 dominos ne faisant pas apparaitre le 2, soit on obtient deux dominos simples ayant un 2. Comme ces derniers sont au nombre de 6, il y a au total $21+\binom{6}{2} = 26$ tirages convenables.

   (f) Soit on tire un double et un simple contenant le chiffre du double (7 choix pour le double, et à chaque fois 6 simples convenables), soit deux simples contenant un même chiffre (sept possibilités pour le chiffre commun, $\binom{6}{2}$ choix de simples, sachant que les deux simples ne peuvent pas avoir deux chiffres en commun). Au total, $7\times 6 + 7\times 15 = 147$.

   (g) Il faut distinguer plein de cas : soit on a $5+0+0+0$ (un seul cas) ; soit $4+1+0+0$ (deux cas, le double 0 et le $1-4$ ou le $0-1$ et le $0-4$) ; soit $3+2+0+0$ (encore deux cas) ; soit $3+1+1+1$ (un seul cas) ; soit $2+2+1+0$ (deux cas) ; soit $2+1+1+1$ (un seul cas). Au total, 9 cas possibles.

2. (a) Il y a n dominos doubles, et $\binom{n}{2}$ dominos simples, soit $n+\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ dominos.

(b) On a désormais des listes, il y a $\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^3$ tirages possibles.

(c) Le nombre de tirages où on n'obtient pas de double est $\left(\dfrac{n(n-1)}{2}\right)^3$, donc par complémentaire le nombre cherché vaut $\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^3 - \left(\dfrac{n(n-1)}{2}\right)^3$.

(d) Soit on obtient le double zéro et deux autres dominos parmi les $\dfrac{n(n-1)}{2}$ n'ayant pas de zéro (il y en a n qui contiennent un zéro), soit deux simples contenant le zéro et un ne le contenant pas. Comme l'ordre est de plus important (il faut choisir dans le premier cas la position du double zéro, dans l'autre la position du domino sans zéro), le nombre de tirages vaut $3 \times \left(\dfrac{n(n-1)}{2}\right)^2 + 3 \times n^2 \times \dfrac{n(n-1)}{2}$

3. (a) On obtient sans trop de problèmes $u_1 = 1$; $u_2 = 3$ (soit deux jaunes verticaux, soit rouge/vert horizontaux avec deux positions possibles) ; $u_3 = 5$ (un avec trois jaunes, quatre avec un jaune soit au début soit au bout) et $u_4 = 11$ (j'ai la flemme de faire des dessins, en plus je manque de couleurs : un avec quatre jaunes, quatre sans jaunes, et six avec deux jaunes qu'on peut placer à trois endroits).

(b) Considérons un mur de longueur $n+2$. Soit il s'achève avec un domino jaune, qui est alors précédé d'un mur de longueur $n+1$, pour lequel on a u_{n+1} constructions possibles. Soit il s'achève avec un binôme rouge/vert (deux possibilités) précédé cette fois d'un mur de longueur n pouvant être construit de u_n façons. Au total, on obtient bien $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$.

(c) La suite (u_n) est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - x - 2 = 0$. Celle-ci a pour discriminant 9 et admet pour racines $x_1 = 2$ et $x_2 = -1$. On en déduit que $u_n = \alpha 2^n + \beta(-1)^n$, où on a $u_1 = 2\alpha - \beta = 1$, et $u_2 = 4\alpha + \beta = 3$, donc en additionnant $6\alpha = 4$, soit $\alpha = \dfrac{2}{3}$, et $\beta = 2\alpha - 1 = \dfrac{1}{3}$. On a donc $u_n = \dfrac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}$

Exercice 3

1. (a) Étudions donc : la fonction f est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$, de dérivée $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2 - x(x+1) + x + 1}{(x+1)x^2} = \dfrac{1}{(x+1)x^2}$. La fonction f est donc strictement croissante sur $]0; +\infty[$. Or, $\ln(x+1) -$

$\ln x = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$, qui a pour limite 0 quand x tend vers $+\infty$. La fonction f estdonc toujours négative. En particulier, $\forall n \geqslant 1$, $\ln(n+1) - \ln n - \frac{1}{n} \leqslant 0$.

(b) Si on somme l'inagilité précédente pour k variant entre 1 et n, on obtient $\sum_{k=1}^{k=n} \ln(k+1) - \ln k \leqslant \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$. La somme de gauche est une somme télescopique valant $\ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1)$. Pour l'autre côté, on utilise la deuxième inégalité donnée par l'énoncé, mais on ne peut sommer qu'entre 2 et n : $\sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=2}^{k=n} \ln k - \ln(k-1) = \ln n - \ln 1$. Il suffit d'ajouter le terme pour $k = 1$, qui vaut 1, pour obtenir l'encadrement souhaité.

(c) Divisons l'encadrement précédent par $\ln n$: $\frac{\ln(n+1)}{\ln n} \leqslant \frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{\ln n} + 1$. Le membre de droite tend manifestement vers 1 ; quand à celui de gauche il vaut $\frac{\ln n + \ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n} = 1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}$, ce qui tend aussi vers 1. Conclusion via le théorème des gendarmes : $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} \sim \ln n$.

(d) Calculons donc $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} + \ln n = \frac{1}{n+1} + \ln n - \ln(n+1)$, qui est négatif car $\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - lnn$ (deuxième inégalité de la première question, décalée pour avoir des $n+1$ à la place des n). La suite (u_n) est donc décroissante. De même, on calcule $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} + \ln(n+1) - \ln(n+2)$, qui cette fois-ci est positif en utilisant la première inégalité de la première question. La suite (v_n) est donc croissante (note : en calculant $u_n - u_{n-1}$ au lieu de $u_{n+1} - u_n$, on retombe exactement sur les inégalités initiales).

(e) Il ne reste qu'à prouver que leur différence tend vers 0 : $u_n - v_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} - \ln n - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} + \ln(n+1) = \ln(n+1) - \ln n = \ln \frac{n+1}{n}$, qui a bien pour limite 0 (ce qui se trouve dans le ln tend vers 1). Les suites sont donc adjacentes.

(f) La suite (u_n) converge donc vers une certaine limite c, ou si l'on préfère $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} - \ln n - c$ tend vers 0, ce qui est exactement ce qu'on nous demande de prouver.

2. (a) Pour $n = 0$, la somme est vide, donc $w_0 = 0$. Ensuite, $w_1 = \dfrac{1}{2}$ (un seul terme dans la somme) ; $w_2 = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{12}$ et $w_3 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{15 + 12 + 10}{60} = \dfrac{37}{60}$.

   (b) Calculons donc $w_{n+1} - w_n = \displaystyle\sum_{k=n+2}^{k=2(n+1)} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{k=2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \geqslant 0$, donc (w_n) est une suite croissante.

   (c) Le terme w_n est une somme de n nombres, dont le plus grand vaut $\dfrac{1}{n+1}$. On en déduit que $w_n \leqslant n \times \dfrac{1}{n+1} \leqslant 1$.

   (d) La suite (w_n) étant croissante et majorée, elle converge. Sa limite est certainement inférieure ou égale à 1 au vu de la question précédente. La suite étant croissante, la limite est par ailleurs supérieure à chacun de ses termes, donc en particulier à $\dfrac{37}{60}$ au vu des calculs de la première question.

   (e) En effet, $u_{2n} - u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=2n} \frac{1}{k} - \ln(2n) - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} + \ln n = \sum_{k=n+1}^{k=2n} \frac{1}{k} - \ln \frac{2n}{n} = w_n - \ln 2$. Comme on a vu plus haut que la suite (u_n) était convergente (peu importe vers quoi), u_{2n} et u_n convergent vers cette même limite, donc $u_{2n} - u_n$ tend vers 0. On en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} w_n - \ln 2 = 0$, ou encore $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} w_n = \ln 2$.

3. (a) Petit raisonnement par récurrence : c'est vrai par hypothèse pour t_0 qui est égal à 1. Supposons donc $t_n \in [0; 1]$, alors $0 \leqslant t_n < t_n^2 + t_n + 1$, donc $0 \leqslant \dfrac{t_n}{t_n^2 + t_n + 1} < 1$, ce qui prouve l'encadrement pour t_{n+1} et achève la récurrence.

   (b) Calculons pour changer $t_{n+1} - t_n = \dfrac{t_n}{t_n^2 + t_n + 1} - t_n = \dfrac{t_n - t_n^3 - t_n^2 - t_n}{t_n^2 + t_n + 1} = \dfrac{-t_n(1 + t_n)}{t_n^2 + t_n + 1} \leqslant 0$. La suite (t_n) est donc décroissante ; étant minorée par 0, elle converge.

(c) Pour $n = 0$, $\dfrac{1}{t_0} = 1 \geqslant 0 + 1$ est vraie. Supposons donc $\dfrac{1}{t_n} \geqslant n + 1$. On a alors $\dfrac{1}{t_{n+1}} = \dfrac{t_n^2 + t_n + 1}{t_n} = t_n + 1 + \dfrac{1}{t_n} \geqslant t_n + 1 + n + 1$. Comme on sait par ailleurs que $t_n \geqslant 0$, on en déduit que $\dfrac{1}{t_{n+1}} \geqslant n + 2$, ce qui prouve l'hérédité de notre propriété et achève la récurrence.

(d) Pour $n = 1$, on a $t_1 = \dfrac{1}{1+1+1} = \dfrac{1}{3}$, donc $\dfrac{1}{t_1} = 3$, et $n + 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} = 1 + 1 + \dfrac{1}{1} = 3$, donc l'inégalité est vérifiée. Supposons la vraie pour un certain entier n, alors en reprenant le calcul de la question précédente, $\dfrac{1}{t_{n+1}} = t_n + 1 + \dfrac{1}{t_n} \leqslant t_n + 1 + n + 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$. Or, on vient de voir que $\dfrac{1}{t_n} \geqslant n + 1$, donc en passant à l'inverse $t_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. On en déduit finalement que $\dfrac{1}{t_{n+1}} \leqslant \dfrac{1}{n+1} + n + 2 + \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} = n + 2 + \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{1}{k}$. Par principe de récurrence, la majoration est donc vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

(e) En divisant les deux inégalités précédentes par n, on obtient l'encadrement $\dfrac{n+1}{n} \leqslant \dfrac{1}{nt_n} \leqslant \dfrac{n+1}{n} + \dfrac{\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}}{n}$. Le membre de gauche de cet encadrement a pour limite 1, et celui de droite aussi car on a vu plus haut que $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} \sim \ln n$, donc par croissance comparée $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}}{n} = 0$. Le théorème des gendarmes nous permet alors de conclure que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{nt_n} = 1$. On a donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} nt_n = 1$, c'est-à-dire que $t_n \sim \dfrac{1}{n}$.